

Lösungsvorschlag zum 14. Übungsblatt

Analysis I

Winter Semester 2025/2026

Aufgabe 1:

(a) Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit der L'Hospital'schen Regel.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{e^x - 1} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \quad (iii) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right)$$

(b) Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen.

$$(i) 1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1 \quad \text{für } x > 1,$$

$$(ii) \sqrt{x} > \ln x \quad \text{für } x \geq e^2.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) (i) Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2x)$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x - 1$. Dann sind f und g differenzierbar und es gilt $f'(x) = 2 \cos(2x)$ und $g'(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da f' und g' stetig sind, gilt

$$f'(x) \rightarrow f'(0) = 2 \cos(0) = 2 \quad \text{und} \quad g'(x) \rightarrow g'(0) = e^0 = 1 \quad \text{für } x \rightarrow 0,$$

und daher mit Satz 4.6 b), e)

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \frac{2}{1} = 2 \quad (x \rightarrow 0).$$

Aus der L'Hospital'schen Regel folgern wir nun

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2.$$

(ii) Es ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)}{1/x}.$$

Wir definieren die differenzierbaren Funktionen

$$f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right),$$

$$g: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x}.$$

Dann gilt

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{x-1}} \quad \text{und} \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{für alle } x > 1.$$

Mit Satz 4.6 erhalten wir daher

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2 \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{x-1}} = 2 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{x-1}} \rightarrow 2 \cdot 1^2 \cdot 1 = 2 \quad (x \rightarrow \infty)$$

(hierbei haben wir verwendet, dass nach Satz 3.38 a) $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ gilt). Aus der L'Hospitalischen Regel folgt nun

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2.$$

(iii) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Definiere

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x),$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Dann gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ und

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{und} \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{für alle } x > 1,$$

Mit Satz 5.30 erhalten wir daher

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x^2 + 1} = 1.$$

(b) (i) Wir definieren die Funktionen $f, g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \ln(x) - \left(1 - \frac{1}{x} \right), \quad g(x) := x - 1 - \ln x.$$

Dann gelten $f(1) = g(1) = 0$. Weiter sind f und g differenzierbar und es gelten

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} > 0 \quad \text{und} \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0 \quad \text{für } x > 1.$$

Nach Satz 5.21 b) sind f und g strikt wachsend. Für $x > 1$ gilt daher $f(x) > f(1) = 0$ und $g(x) > g(1) = 0$. Nach Definition von f und g bedeutet das gerade

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x \quad \text{und} \quad \ln x < x - 1 \quad \text{für alle } x > 1.$$

(ii) Wir gehen genauso wie in (i) vor und definieren die Funktion $f: [e^2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$. Dann ist f differenzierbar und für $x \geq e^2$ gilt $x > 4$ (denn es ist $e > 2$) und damit

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{2x} > \frac{\sqrt{4} - 1}{2x} \geq 0.$$

Nach Satz 5.21 b) ist f strikt wachsend. Für $x > e^2$ gilt daher $f(x) > f(e^2) = \sqrt{e^2} - \ln(e^2) = e - 2 > 0$. Nach Definition von f impliziert dies

$$\sqrt{x} > \ln x \quad \text{für alle } x \geq e^2.$$

Aufgabe 2 (K):

Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

| | |
|--|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right)$ | (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right)$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) \ln(1-x)$ | (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x$ |

wobei $\cot : (-\pi, \pi) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ und $a \in (0, \infty)$ seien.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Wir wollen die L'Hospitalsche Regel anwenden. Für $x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ ist

$$\frac{1}{x} - \cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x \sin(x)} =: \frac{f(x)}{g(x)},$$

wobei wir $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) - x \cos(x)$ und $g : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \sin(x)$ definiert haben. Es sind f, g (unendlich oft) differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \cos(x) - \cos(x) + x \sin(x) = x \sin(x) \quad \text{und} \quad g'(x) = \sin(x) + x \cos(x)$$

für alle $x \in (-\pi, \pi)$. Aus der Stetigkeit von f' und g' folgt $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = g'(0) = 0$, sodass nicht klar ist, ob $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert. Also leiten wir nochmal ab und erhalten für alle $x \in (-\pi, \pi)$

$$f''(x) = \sin(x) + x \cos(x) \quad \text{und} \quad g''(x) = \cos(x) + \cos(x) - x \sin(x) = 2 \cos(x) - x \sin(x).$$

Aus der Stetigkeit von f'' und g'' folgt nun $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = f''(0) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0} g''(x) = g''(0) = 2$, sodass mit Satz 4.6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{0}{2} = 0$ folgt. Somit folgt aus der L'Hospitalschen Regel, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tatsächlich existiert und dass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 0$ ist. Eine nochmalige Anwendung der L'Hospitalschen Regel zeigt nun, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert und dass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$. Wir erhalten also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

(b) Sei $a \in (0, \infty)$ fest. Wir definieren $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x = e^{\ln(a)x}$. Dann ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = \ln(a)a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt $f'(0) = \ln(a)$ und daher

$$n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) = \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n}} \rightarrow f'(0) = \ln(a) \quad (n \rightarrow \infty).$$

(c) Für $x \in (0, 1)$ gilt

$$\ln x \ln(1-x) = \frac{\ln x}{1-x} \cdot [(1-x) \ln(1-x)].$$

Wir untersuchen die beiden Faktoren auf der rechten Seite genauer: Aus der Differenzierbarkeit von \ln in $x_0 := 1$ folgt einerseits, dass

$$\frac{\ln(x)}{1-x} = -\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} \rightarrow -\ln'(1) = -1 \quad (x \rightarrow 1^-).$$

(Alternativ erhält man aus der L'Hospitalschen Regel $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(x)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1/x}{-1} = -1$, wobei die Gleichungskette von rechts nach links zu lesen ist). Andererseits haben wir für $x \rightarrow 1^-$ nach Satz 4.6 a) $1-x \rightarrow 0^+$ und damit nach Beispiel 5.28 b)

$$(1-x) \ln(1-x) \rightarrow 0.$$

Aus Satz 4.6 b) folgt daher

$$\ln x \ln(1-x) = \frac{\ln x}{1-x} \cdot [(1-x) \ln(1-x)] \rightarrow -1 \cdot 0 = 0 \quad (x \rightarrow 1^-).$$

(d) Sei $a \in (0, \infty)$ fest. Es ist $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)x}$ für $x \in \mathbb{R}_+$. Für $x \rightarrow \infty$ gilt $\frac{a}{x} \rightarrow 0$ und aus der Differenzierbarkeit von \ln in 1 folgt

$$x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) = a \frac{\ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) - \ln(1)}{\left(1 + \frac{a}{x} \right) - 1} \rightarrow a \ln'(1) = a \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

(Alternativ kann man wieder die L'Hospital'sche Regel anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{a}{x})}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{a}{x^2} \frac{1}{1+\frac{a}{x}}}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{1 + \frac{a}{x}} = a,$$

wobei wieder die Gleichungskette von rechts nach links zu lesen ist). Also folgt aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = e^{\ln(1+\frac{a}{x})x} \rightarrow e^a \quad (x \rightarrow \infty).$$

Aufgabe 3 (K):

(a) Zeigen Sie die Ungleichung

$$\arcsin x \leq \frac{\pi}{2} + 2x\sqrt{1-x^2} \quad \text{für } x \in [-1, 1].$$

Untersuchen Sie dazu die Extremalstellen der Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \arcsin(x) - 2x\sqrt{1-x^2}$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extremalstellen und Extremwerte der Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x^2}{2(x+1)}$. Besitzt die Funktion globale Minima oder Maxima? Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Es sei $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(x) - 2x\sqrt{1-x^2}$. Dann ist f differenzierbar auf $(-1, 1)$ und für alle $x \in (-1, 1)$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2\sqrt{1-x^2} - 2x \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{4x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Da für $x \in (-1, 1)$ der Nenner $\sqrt{1-x^2} > 0$ ist, hat $f'(x)$ dasselbe Vorzeichen wie der Zähler $4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$. Es folgt

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \iff x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty), \\ = 0 & \iff x = \pm \frac{1}{2}, \\ < 0 & \iff x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{cases} \quad (1)$$

Aus Korollar 5.22 a) und (1) folgt nun, dass f in $x_0 = -\frac{1}{2}$ ein lokales Maximum und in $x_1 = \frac{1}{2}$ ein lokales Minimum hat. Satz 5.17 impliziert ferner, dass es keine weiteren lokalen Extremalstellen geben kann. Das lokale Maximum ist

$$f(x_0) = \arcsin(x_0) - 2x_0\sqrt{1-x_0^2} = -\frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}$$

(hierbei haben wir ausgenutzt, dass $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$). An den Randpunkten gilt $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$ und $f(1) = \frac{\pi}{2}$. Wir stellen fest, dass $f(-1) < f(x_0) < f(1)$ gilt, denn

$$f(1) - f(x_0) = \underbrace{\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}}_{>0} + \frac{\pi}{6} > 0 \implies f(1) > f(x_0), \quad \text{und}$$

$$f(x_0) - f(-1) = \frac{\pi}{3} + \frac{3}{2} > 0 \implies f(x_0) > f(-1).$$

Wir folgern, dass $f(1) = \frac{\pi}{2}$ das globale Maximum von f ist, d.h., es gilt

$$f(x) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{für alle } x \in [-1, 1] \implies \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2} + 2x\sqrt{1-x^2} \quad \text{für alle } x \in [-1, 1].$$

(b) Es sei f definiert durch

$$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x+1) - \frac{x^2}{2(x+1)} = \ln(x+1) - \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right).$$

Wir bestimmen zunächst die lokalen Extrema von f . Dazu bemerken wir zunächst, dass f differenzierbar ist und für die Ableitung gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{x}{2} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x+3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2} \quad \text{für alle } x \geq 0.$$

Daher ist für $x \geq 0$

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \iff 2x+3 > (x+1)^2 \iff 2 > x^2 \iff x \in [0, \sqrt{2}), \\ = 0 & \iff 2x+3 = (x+1)^2 \iff 2 = x^2 \iff x = \sqrt{2}, \\ < 0 & \iff 2x+3 < (x+1)^2 \iff 2 < x^2 \iff x \in (\sqrt{2}, \infty). \end{cases} \quad (2)$$

Aus (2) und Satz 5.17 folgt, dass f nur in $x_0 = \sqrt{2}$ ein lokales Extremum haben kann. Ferner folgt aus (2) und Korollar 5.22 a), dass f in x_0 tatsächlich ein lokales Maximum hat. Dieses ist sogar global, da wegen (2) die Funktion f wachsend auf $[0, \sqrt{2}]$ und fallend auf $[\sqrt{2}, \infty)$ ist. Das globale Maximum von f ist also

$$f(\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Weiterhin gibt es kein globales Minimum, da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty. \quad (3)$$

Für den Beweis von (3) bemerken wir, dass nach der L'Hopitalschen Regel $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$ ist. Daher gibt es ein $K \geq 1$, sodass $\frac{\ln(x+1)}{x} \leq \frac{1}{8}$ für $x \geq K$. Dann folgern wir für alle $x \geq K \geq 1$

$$f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \stackrel{x \geq 1}{\leq} \ln(x+1) - \frac{x}{4} \leq \frac{x}{8} - \frac{x}{4} = -\frac{x}{8}. \quad (4)$$

Da $\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x}{8} = -\infty$ gilt, impliziert (4) unmittelbar (3). Also hat f kein globales Minimum.

Aufgabe 4:

Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der arithmetische Mittelwert $\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ den quadratischen Abstand

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2$$

minimiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

Da $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$ gilt, existiert ein globales Minimum (Zeigen Sie dies! vgl. Blatt 11).

Um den Wert x_0 zu finden, der die Funktion f minimiert, bestimmen wir zunächst die erste Ableitung von f und untersuchen die kritischen Stellen mit $f'(x) = 0$.

Nach Produkt und Kettenregel

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx} (x_i - x)^2 = \sum_{i=1}^n 2(x_i - x) \cdot (-1) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - x).$$

Wir setzen $f'(x) = 0$, siehe Satz 5.18, also

$$0 = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - x) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i) + 2nx \iff x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Wir erkennen hier die Definition des arithmetischen Mittels \bar{x} . Um sicherzustellen, dass es sich um ein Minimum handelt, betrachten wir die zweite Ableitung $f''(\bar{x})$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(-2 \sum_{i=1}^n x_i + 2nx \right) = 2n > 0$$

Da somit auch $f''(\bar{x}) > 0$, handelt es sich um ein Minimum. Folglich minimiert das arithmetische Mittel die Summe der quadratischen Abweichungen.

Aufgabe 5:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie:

(a) Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in I$ sowie $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ liegt die sogenannte Konvexkombination $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ ebenfalls in I .

(b) Sind x_1, \dots, x_n und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ wie oben, dann gilt die Jensensche Ungleichung

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien ferner $x_1, \dots, x_n \in I$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ gegeben, wobei $n \in \mathbb{N}$ sei. Wir wollen zeigen, dass $x := \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ in I liegt. Dazu definieren wir $a := \min\{x_1, \dots, x_n\} \in I$ und $b := \max\{x_1, \dots, x_n\} \in I$. Nach Definition gilt dann $a \leq b$, und da I ein Intervall ist, folgt sofort $[a, b] \subseteq I$. Nun gilt aber $x \in [a, b]$, da

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \geq \sum_{k=1}^n \lambda_k a = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) a = a \quad \text{und}$$

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k b = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) b = b.$$

Damit ist $x \in [a, b] \subseteq I$.

(b) Wir beweisen die Behauptung per vollständiger Induktion. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir dazu mit $A(n)$ die Aussage

$$A(n) : \quad x_1, \dots, x_n \in I, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1] \text{ mit } \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \\ \implies f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Induktionsanfang: Die Wahrheit von $A(1)$ ist trivial, da dann $\lambda_1 = 1$ sein muss.

Induktionsschluss: Sei $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr (IV) und seien $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$ mit $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$ vorgegeben. Wir müssen nun die Ungleichung

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

zeigen. Dazu können wir o.B.d.A. (d.h. ohne Beschränkung der Allgemeinheit) annehmen, dass $\lambda_{n+1} \neq 1$ gilt (denn ist $\lambda_{n+1} = 1$, so folgt aus der Voraussetzung $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = 1$, dass $\lambda_k = 0$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt, womit die zu zeigende Ungleichung wieder trivial ist). Sei also $\lambda_{n+1} \neq 1$. Für $k \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir dann $\mu_k := \lambda_k / (1 - \lambda_{n+1}) \geq 0$. Dann gilt $\sum_{k=1}^n \mu_k = (1 - \lambda_{n+1})^{-1} \sum_{k=1}^n \lambda_k = (1 - \lambda_{n+1})^{-1} (1 - \lambda_{n+1}) = 1$ (da $\mu_k \geq 0$, folgt hieraus auch $\mu_k \in [0, 1]$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$). Nach (a) liegt $x := \sum_{k=1}^n \mu_k x_k$ in I und aus der Induktionsvoraussetzung (IV) und der Konvexität von f (KV) erhalten wir

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) &= f((1 - \lambda_{n+1})x + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \stackrel{\text{(KV)}}{\leq} (1 - \lambda_{n+1})f(x) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \\ &= (1 - \lambda_{n+1})f(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{\leq} (1 - \lambda_{n+1})[\mu_1 f(x_1) + \dots + \mu_n f(x_n)] + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Also ist $A(n+1)$ wahr. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist daher $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.