Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Richard Nutt

Lösungsvorschlag zum 15. Übungsblatt

Analysis I

Winter Semester 2025/2026

– keine Abgabe, keine Korrektur –
Die Lösungen dieses Übungsblatts werden in der letzten Übung besprochen.

Aufgabe 1:
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{x}{n(1+x^{n+1})}$.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\|f_n\|_\infty$, indem Sie das globale Maximum von f_n bestimmen.

(b) Untersuchen Sie $(f_n)_{n\geq 1}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f_n differenzierbar und nach der Quotientenregel gilt

$$f_n'(x) = \frac{1\cdot(1+x^{n+1}) - x(n+1)x^n}{n(1+x^{n+1})^2} = \frac{1-nx^{n+1}}{n(1+x^{n+1})^2} \quad \text{für alle } x \in [0,\infty).$$

Hieraus folgt für $x \in [0,\infty)$

$$f_n'(x) = 0 \iff 1 - nx^{n+1} = 0 \iff x = n^{-\frac{1}{n+1}}. \tag{1}$$

Setzen wir also $x_n := n^{-\frac{1}{n+1}}$, so folgt aus (1) genauer,

$$f_n'(x) \begin{cases} > 0 \iff x \in [0, x_n), \\ = 0 \iff x = x_n, \\ < 0 \iff x \in (x_n, \infty). \end{cases} \tag{2}$$

Aus (2) und Satz 5.24 folgt nun, dass f_n strikt wachsend auf $[0, x_n]$ und strikt fallend auf $[x_n, \infty)$ ist. Also ist x_n die Stelle des globalen Maximums von f und es gilt

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)| = f_n(x_n) = \frac{n^{-\frac{1}{n+1}}}{n(1+n^{-1})} = \frac{n^{-\frac{1}{n+1}}}{n+1}.$$

(b) Aus Aufgabenteil (a) folgt

$$\|f_n\|_\infty = \frac{n^{-\frac{1}{n+1}}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Also konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ (und damit insbesondere auch punktweise).

Aufgabe 2:
(a) Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $x_0 \in (a,b)$. Sei $f \in C^{n+1}(a,b)$. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + \mathcal{O}(|x-x_0|^{n+1})$$

für $x \to x_0$.

(b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. (*Hinweis:* Die Regel von L'Hospital führt zu komplizierten Ausdrücken. Approximieren die Funktionen stattdessen durch geeignete Taylorpolynome.)

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x) + \frac{1}{2}x^2}{x^3}$ (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - e^{-x^2/2}}{x^4}$

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x) - x}{x^3}$ (iv) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Nach Theorem 5.38a) gilt nach der Lagrange Restgliedformel, dass

$$f(x) - T_{n,x_0}f(x) = R_{n,x_0}f(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)(x - x_0)^{n+1}$$

Sei $\overline{B}(x_0, r) \subseteq (a, b)$ dann gilt

$$\frac{|R_{n,x_0}f(x)|}{|x - x_0|^{n+1}} \le \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,\overline{B}(x_0,r)}}{(n+1)!} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{|x - x_0|^{n+1}} \le \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,\overline{B}(x_0,r)}}{(n+1)!},$$

also $R_{n,x_0}f(x) \in \mathcal{O}(|x - x_0|^{n+1})$, wie behauptet.

(b) Im folgenden werden wir stets den Zähler entwickeln. Als komposition glatter Funktionen wird dieser stets glatt sein auf beispielsweise dem Intervall $(-1, 1)$. Daher können wir Teil a) anwenden.

(i) Behaptung: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x) + \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$

Wir entwickeln die glatten Terme im Zähler bis zur Ordnung x^3 entsprechend Teil a),d.h.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(|x|^4),$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(|x|^5).$$

Einsetzen in den Zähler ergibt

$$\begin{aligned} &\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(|x|^4) \\ &= (x - x) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2\right) + \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^3\right) + \mathcal{O}(|x|^4) \\ &= \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right)x^3 + \mathcal{O}(|x|^4) = \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}(|x|^4). \end{aligned}$$

Somit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x) + \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}(|x|^4)}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

(ii) Behaptung: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - e^{-x^2/2}}{x^4} = -\frac{1}{12}$

Wir entwickeln wieder die Terme bis zur Ordnung 4.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \mathcal{O}(|x|^6)$$
$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + O(u^3) \quad \text{mit } u = -\frac{x^2}{2}$$

Einsetzen von $u = -x^2/2$ in die Exponentialreihe liefert (siehe Lemma aus der Übung)

$$e^{-x^2/2} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + \mathcal{O}(|x|^6) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}(|x|^6).$$

Weiter liefert das Einsetzen in den Zähler nun

$$\begin{aligned}\cos(x) - e^{-x^2/2} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right) + \mathcal{O}(|x|^6) \\ &= \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right) x^4 + \mathcal{O}(|x|^6) = -\frac{2}{24}x^4 = -\frac{1}{12}x^4\end{aligned}$$

und die Berechnung des Grenzwerts ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - e^{-x^2/2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + \mathcal{O}(|x|^6)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

(iii) Behaptung: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\tan x) - x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$

Da der Nenner x^3 ist, vernachlässigen wir Terme höherer Ordnung als 3. Wir entwickeln wieder

$$\begin{aligned}\tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(|x|^5) \\ \sin(u) &= u - \frac{u^3}{6} + \mathcal{O}(|u|^5)\end{aligned}$$

Setzen $u = \tan(x)$ in die Sinus-Reihe ein

$$\sin(\tan x) = \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(|x|^5)\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(|x|^5)\right)^3 + \mathcal{O}(|x|^5) = x + \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(|x|^5).$$

Somit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(|x|^5)\right) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(|x|^5)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

(iv) Behaptung: $L = \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = -\dfrac{1}{3}$

Wir bringen den Term zunächst auf einen gemeinsamen Nenner

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x}.$$

Für den Nenner gilt $\frac{x^2 \sin^2 x}{x^4} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to 1$ für $x \to 0$, daher müssen wir den Zähler bis zur Ordnung x^4 entwickeln. Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(|x|^5) \\ \sin^2(x) &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \mathcal{O}(|x|^6)\end{aligned}$$

Nun setzten wir diesen Ausdruck in den Zähler ein

$$x^2 \sin^2 x - x^2 + \mathcal{O}(|x|^6) = (x^2 - \frac{1}{3}x^4) - x^2 + \mathcal{O}(|x|^6) = -\frac{1}{3}x^4 + \mathcal{O}(|x|^6)$$

und wir erhalten

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^4 + \mathcal{O}(|x|^6)}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3} + \mathcal{O}(|x|^6)/x^4}{\sin^2(x)/x^2} = -\frac{1}{3}.$$

Aufgabe 3:
(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T_{x_0}f$ von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ im Entwicklungspunkt $x_0 := 1$. Konvergiert $T_{x_0}f$ punktweise gegen f?

(b) Berechnen Sie $\tan(1/10)$ näherungsweise mit Hilfe des Taylorpolynoms $T_{3,0}\tan$. Zeigen Sie auch, dass der Fehler kleiner als $\frac{10}{3} \cdot 10^{-4}$ ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Eine induktive Anwendung von Beispiel 5.13 a) zeigt

$$f^{(n)}(1) = f(1) = e \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Also ist die Taylorreihe von f gegeben durch

$$T_1 f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{e}{n!}(x-1)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $T_1 f(x)$ gegen $f(x)$, da

$$e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} = e^1 e^{x-1} \overset{(*)}{=} e^x = f(x),$$

wobei wir in $(*)$ das Exponentialgesetz verwendet haben.

(b) Nach Beispiel 5.13 b) und der Produkt- und Kettenregel gelten

$$\begin{aligned}
&\tan^{(1)} = 1 + \tan^2,\\
&\tan^{(2)} = 2\tan \cdot \tan' = 2\tan\left(1 + \tan^2\right) = 2\tan + 2\tan^3\\
&\tan^{(3)} = 2\tan' + 6\tan^2\tan' = 2(1+\tan^2) + 6\tan^2(1+\tan^2) = 6\tan^4 + 8\tan^2 + 2\\
&\tan^{(4)} = 24\tan^3\tan' + 16\tan\tan' = 24\tan^3(1+\tan^2) + 16\tan(1+\tan^2) = 24\tan^5 + 40\tan^3 + 16\tan
\end{aligned}$$

Da $\tan(0) = 0$ ist, folgt aus obigen Gleichungen $\tan^{(1)}(0) = 1$, $\tan^{(2)} = 0$, $\tan^{(3)}(0) = 2$. Somit ist $T_{3,0}\tan$ gegeben durch

$$T_{3,0}\tan(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{\tan^{(n)}}{n!} x^n = x + \frac{1}{3}x^3 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Für die Fehlerabschätzung benutzen wir Theorem 5.38. Nach Theorem 5.38 gibt es für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ein $\theta_x \in (0,1)$ mit

$$|R_{3,0}f(x)| = |\tan(x) - T_{3,0}\tan(x)| = \frac{1}{4!}|\tan^{(4)}(\theta_x x)|\, x^4 \leq \frac{\sup_{y\in[0,x]} |\tan^{(4)}(y)|}{4!} x^4. \tag{3}$$

Nun gilt $|\tan^{(4)}(y)| = \tan^{(4)}(y) \leq 1$ für $y \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$\tan^{(4)}(y) = 24\tan^5(y) + 40\tan^3(y) + 16\tan(y) \leq 24 \cdot 1 + 40 \cdot 1 + 16 \cdot 1 = 80,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass tan wachsend ist und daher $0 = \tan(0) \leq \tan(y) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ für alle $y \in [0, \frac{\pi}{4}]$ gilt. Nutzen wir dies in (3), erhalten wir

$$|R_{3,0}\tan(x)| \leq \frac{\sup_{y\in[0,x]} |\tan^{(4)}(y)|}{4!} x^4 \leq \frac{80}{4!}x^4 = \frac{10}{3}x^4 \quad \text{für alle } x \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

Insbesondere folgt $|R_{3,0}\tan(1/10)| \leq \frac{10}{3}10^{-4}$.

Aufgabe 4:
(a) Sei $x \in (-1,1)$. Berechnen Sie den Reihenwert von $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

(b) Sei $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho = \infty$ und

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Es gelte ferner $f(0) = 1$ und $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Korollaren 5.34 und 5.35, dass $f(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
(a) Sei

$$f\colon (-1,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

wobei wir für die zweite Gleichung Beispiel 3.2 b) genutzt haben (Reihenwert der geometrischen Reihe). Offensichtlich ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ für $x \in (-1,1)$. Andererseits können wir Korollar 5.34 verwenden und erhalten für die Ableitung

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

Somit folgern wir, dass $\sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$ konvergiert und für den Reihenwert gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

(b) Sei f wie in der Aufgabenstellung. Nach Korollar 5.34 gilt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = f'(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Nach dem Identitätssatz (Korollar 5.35) muss daher

$$(n+1)a_{n+1} = a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \implies \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

Mit Induktion folgert man hieraus und der Voraussetzung $a_0 = f(0) = 1$, dass

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0. \tag{5}$$

Induktionsanfang: Ist $n = 0$, so folgt (5) aus der Voraussetzung $a_0 = f(0) = 1$.

Induktionsschluss: Es sei $a_n = \frac{1}{n!}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV). Dann folgern wir

$$a_{n+1} \overset{(4)}{=} \frac{1}{n+1} a_n \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Dies zeigt (5). Also ist

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$