X

01.09.2012
Schmoeger

Analysis II, H12

Aufgabe 1
Zeigen Sie:

(a) Für $A \subseteq \mathbb{R}$ offen ist $\arctan(A)$ offen. (1 Punkt)

(b) $B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{x^2+y^2} \leq 2, y \geq x \right\}$ ist kompakt. (1 Punkt)

(c) $C := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{x^2+y^2} \leq 1, x > y^2 \right\}$ ist weder offen noch abgeschlossen. (1 Punkt)

Aufgabe 2
Es sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2-y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2$. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ differenzierbar ist. (1 Punkt)

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv und differenzierbar sowie $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar und M eine reelle $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$h(x) := g(f(x)^T M f^{-1}(x))$$

auf $\mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und drücken Sie h' durch f', g' und M aus.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Es sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := 3x^2 - x^2y^2 + 2y^2$. Bestimmen Sie jedes lokale Extremum von f auf $\mathbb{R}^2$ und um welche Art von Extremum es sich handelt. Gibt es globale Extrema?

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Diese Aufgabe war leider fehlerhaft.

Aufgabe 6
Es sei M eine invertierbare, reelle $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie:

(a) $||\cdot||_M \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $||x||_M := ||Mx||_2$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. (1,5 Punkte)

(b) $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_M)$ ist vollständig. (1,5 Punkte)

Aufgabe 7 (3 Punkte)
Bestimmen Sie eine explizite Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$