Aufgabe 1

(a) *Behauptung:* Für $A \subseteq \mathbb{R}$ offen ist $\arctan(A)$ offen.
Beweis: Die Funktion $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist stetig und bijektiv mit Umkehrfunktion $\arctan: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Also ist

$$\arctan(A) = \{x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \colon \exists_{y \in A} : x = \arctan(y)\}$$

das Urbild von der offenen Menge A unter der stetigen Funktion tan und daher offen.

$\square$

(b) *Behauptung:* $B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2, y \geq x \right\}$ ist kompakt.
Beweis:

(i) Sei $(x, y) \in B$. Dann gilt

$$||(x, y)||^2 = x^2 + y^2 \leq 4$$

und damit ist B beschränkt.

(ii) Sei $(x_n, y_n) \in B$ eine konvergente Folge mit $(x, y) := \lim\limits_{n \to \infty}(x_n, y_n)$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ mit der Stetigkeit der Funktion $t \mapsto t^2$

$$||(x, y)||^2 = x^2 + y^2 = \lim_{n \to \infty} x_n^2 + y_n^2 \leq 4$$

und insbesondere

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} : y_n \geq x_n \Longrightarrow y = \lim_{n \to \infty} y_n \geq \lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Insgesamt gilt $(x, y) \in B$ und somit ist B abgeschlossen. Der Satz von Heine-Borel liefert nun mit (i) und (ii) die Kompaktheit von B.

$\square$

(c) *Behauptung:* $C := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, x > y^2 \right\}$ ist weder offen noch abgeschlossen.
Beweis: (i) Es gilt $(0, 0) \notin C$ aber $(\frac{1}{n}, 0) \in C$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n \to \infty}(\frac{1}{n}, 0) \to (0, 0)$. Also ist C nicht abgeschlossen.
(ii) Es gilt $(1, 0) \in C$ und für jedes $\epsilon \in (0, 1)$ gilt $(1 + \frac{\epsilon}{2}, 0) \in U_\epsilon(1, 0)$. Außerdem gilt $(1 + \frac{\epsilon}{2}, 0) \notin C$. Also ist C nicht offen.

$\square$

Aufgabe 2

Voraussetzung: Es sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} (x^2 - y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ folgt mit Ketten- und Produktregel

$$f_x(x, y) = 2x \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

$$f_y(x, y) = -2y \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + \frac{2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

Für $(x, y) = (0, 0)$ gilt

$$f_x(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cos\left(\frac{1}{t^2}\right)}{t} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{-t^2 \cos\left(\frac{1}{t^2}\right)}{t} = 0.$$

$\square$

(b) *Behauptung:* f ist in $(0, 0)$ differenzierbar.
Beweis: Es gilt $(\text{grad } f)(0, 0) = (0, 0)$ und für $h \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$

$$\frac{1}{||h||} |f(h) - f(0, 0) - (\text{grad } f)(0, 0)h| = \frac{|h_1^2 - h_2^2|| \cos\left(\frac{1}{||h||}\right)}{||h||} \leq \frac{2||h||^2}{||h||} = 2||h|| \overset{h \to (0,0)}{\to} 0.$$

$\square$

Aufgabe 3

Voraussetzung: Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv und differenzierbar mit $f^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Außerdem sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar und M eine reelle $n \times n$-Matrix.
Behauptung: $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$h(x) := g(f(x)^T M f^{-1}(x))$$

auf $\mathbb{R}^n$ ist differenzierbar und für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$h'(x) = g'(f(x)^T M f^{-1}(x))(f^{-1}(x)^T M^T, f(x)^T M) \begin{pmatrix} f'(x) \\ f'(f^{-1}(x))^{-1} \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wir definieren die Abbildungen $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ und $G: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \begin{pmatrix} f(x) \\ f^{-1}(x) \end{pmatrix} \text{ und } G(y_1, y_2) := y_1^T M y_2.$$

F ist auf $\mathbb{R}^n$ differenzierbar, da f und f^{-1} auf $\mathbb{R}^n$ differenzierbar sind und G ist auf $\mathbb{R}^{2n}$ differenzierbar, denn für $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^{2n} \backslash \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{||(h_1, h_2)||_2} |G((y_1, y_2) + (h_1, h_2)) - G(y_1, y_2) - y_1^T M h_2 - h_1^T M y_2| &= \frac{|h_1^T M h_2|}{||(h_1, h_2)||_2} \\ &\leq ||M|| ||(h_1, h_2)||_2 \overset{(h_1, h_2) \to (0,0)}{\to} 0. \end{aligned}$$

Also $G'(y_1, y_2) = (y_2^T M^T, y_1^T M)$. Dann ist auch $G \circ F$ nach der Kettenregel differenzierbar und ebenso $h = g \circ G \circ F$ auf $\mathbb{R}^n$. Die Kettenregel liefert außerdem für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)^T M f^{-1}(x)) G'(F(x)) F'(x) \\ &= g'(f(x)^T M f^{-1}(x))(f^{-1}(x)^T M^T, f(x)^T M) \begin{pmatrix} f'(x) \\ (f^{-1})'(x) \end{pmatrix} \\ &= g'(f(x)^T M f^{-1}(x))(f^{-1}(x)^T M^T, f(x)^T M) \begin{pmatrix} f'(x) \\ f'(f^{-1}(x))^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4
Voraussetzung: Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := 3x^2 - x^2y^2 + 2y^2$.
Behauptung: f hat bei $(0,0)$ ein lokales Minimum mit Wert $f(0,0) = 0$. Globale Extrema gibt es keine.
Beweis: $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x(3-y^2) \\ f_y(x,y) &= 2y(2-x^2) \\ f_{xx}(x,y) &= 2(3-y^2) \\ f_{yy}(x,y) &= 2(2-x^2) \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= -4xy. \end{aligned}$$

Wir bestimmen zunächst die stationären Punkte von f, also

$$(\operatorname{grad} f)(x,y) = (0,0) \iff 2x(3-y^2) = 0 \text{ und } 2y(2-x^2) = 0. \tag{1}$$

Dann folgt

$$2x(3-y^2) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } y^2 = 3.$$

$x = 0$ liefert in der zweiten Gleichung $y = 0$. $y^2 = 3$ liefert in der zweiten Gleichung $x^2 = 2$. Also sind alle Lösungen von (1) gegeben durch

$$\{v_1, \dots, v_5\} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

Es gilt

- $H_f(v_1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ist wegen $6 > 0$ und $\det(H_f(v_0)) = 24$ positiv definit. Also hat f dort ein lokales Minimum mit dem Wert $f(0,0) = 0$.
- $H_f(v_2) = H_f(v_3) = -H_f(v_4) = -H_f(v_5) = \begin{pmatrix} 0 & -4\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom ist bei jeder Matrix $\lambda^2 - 96$ und daher haben die Matrizen jeweils $\sqrt{96}$ und $-\sqrt{96}$ als Eigenwerte und sind somit indefinit. f hat also bei $v_2, \dots, v_5$ jeweils kein lokales Extremum.
- Es gibt keine globalen Extrema, da

$$f(n,0) = 3n^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ und } f(n,n) = 5n^2 - n^4 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

$\square$

Aufgabe 5
Diese Aufgabe war leider fehlerhaft.

Aufgabe 6
Voraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine invertierbare, reelle $n \times n$-Matrix.

(a) *Behauptung:* $\|\cdot\|_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $\|x\|_M = \|Mx\|_2$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.
Beweis: Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Es gilt $\|x\|_M = \|Mx\|_2 \geq 0$ und

$$\|x\|_M = 0 \iff \|Mx\|_2 = 0 \iff Mx = 0 \iff x = 0,$$

wobei im vorletzten Schritt die Normeigenschaft von $\|\cdot\|_2$ und im letzten Schritt die Invertierbarkeit der Matrix M ausgenutzt wurde.

- Es gilt
$$||\alpha x||_M = ||M(\alpha x)||_2 = ||\alpha M x||_2 = |\alpha| \cdot ||Mx||_2 = |\alpha| \cdot ||x||_M.$$
- Es gilt
$$||x+y||_M = ||M(x+y)||_2 = ||Mx+My||_2 \le ||Mx||_2 + ||My||_2 = ||x||_M + ||y||_M.$$

□

(b) *Behauptung:* $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_M)$ ist vollständig.
Beweis: Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich $||\cdot||_M$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt
$$||x_n - x_m||_2 = ||M^{-1}M(x_n - x_m)||_2 \le ||M^{-1}||_2 \cdot ||M(x_n - x_m)||_2 = ||M^{-1}||_2 \cdot ||x_n - x_m||_M.$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich $||\cdot||_2$ und da $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ ein Banachraum ist, existiert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $||x_n - x_0||_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dann folgt aber
$$||x_n - x_0||_M = ||M(x_n - x_0)||_2 \le ||M||_2 \cdot ||x_n - x_0||_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$
Folglich konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich $||\cdot||_M$ gegen $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Also ist $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_M)$ vollständig.

□

Aufgabe 7
Behauptung: Das Anfangswertproblem
$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
wird eindeutig auf $\mathbb{R}$ von der Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch
$$y(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} - e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$
gelöst.
Beweis: Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 4$ mit Eigenräumen $E_1 = [\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}]$ und $E_4 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$. Die Hauptfundamentallösung ist damit
$$Y(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{4t} \\ -e^t & e^{4t} \end{pmatrix}.$$
Somit folgt
$$Y(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \Longrightarrow \quad Y(0)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Also ist
$$e^{tA} = Y(t)Y(0)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^t + e^{4t} & -2e^t + 2e^{4t} \\ -e^t + e^{4t} & e^t + 2e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= e^{tA} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^t + e^{4t} & -2e^t + 2e^{4t} \\ -e^t + e^{4t} & e^t + 2e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\quad + \int_0^t \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{t-s} + e^{4(t-s)} & -2e^{t-s} + 2e^{4(t-s)} \\ -e^{t-s} + e^{4(t-s)} & e^{t-s} + 2e^{4(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} ds \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 3e^{4t} \end{pmatrix} + \int_0^t \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6e^{t-s} + 3e^{4(t-s)} \\ 3e^{t-s} + 3e^{4(t-s)} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 2e^{t-s} - \frac{1}{4}e^{4(t-s)} \\ -e^{t-s} - \frac{1}{4}e^{4(t-s)} \end{pmatrix} \right]_{s=0}^{t} \\
&= \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2e^t - \frac{1}{4}e^{4t} \\ -e^t - \frac{1}{4}e^{4t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5}{4}e^{4t} - 2e^t + \frac{7}{4} \\ \frac{5}{4}e^{4t} + e^t - \frac{5}{4} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□