Analysis 2 – Sommer 201~~6~~ 7

Aufgabe 1 Geben Sie für die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ jeweils an ob sie beschränkt, offen, abgeschlossen oder kompakt sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ und } y \leq 1\}$,

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

Lösung. (a) Die Menge A ist *nicht beschränkt*, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(n, 0) \in A$ und es gilt $\|(n,0)\| \to \infty$ für $n \to \infty$. Insbesondere ist A *nicht kompakt.*
A ist *nicht abgeschlossen*, denn $(\frac{1}{n}, 0) \in A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $(\frac{1}{n}, 0) \to (0,0)$ für $n \to \infty$, aber $(0,0) \notin A$.
A ist *nicht offen*, denn $(1,1) \in A$ und $(1, 1 + \frac{1}{n}) \notin A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das zeigt, dass für kein $r > 0$ die Kugel $U_r(1,1)$ in A enthalten ist.

(b) Die Menge B ist *beschränkt*: Für alle $(x, y) \in B$ gilt $|x| \leq |x| + |y| \leq 1$ und genauso $|y| \leq 1$. Es folgt, dass $\|(x,y)\| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} \leq \sqrt{2}$.
B ist *abgeschlossen*: Ist $\big((x_n, y_n)\big)$ eine Folge in B die gegen ein $(x, y) \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann konvergieren die reellen Folgen (x_n) und (y_n) gegen x bzw. y. Mit der Stetigkeit des Betrags schließen wir $|x_n| \to |x|$ sowie $|y_n| \to |y|$ und damit auch $|x_n| + |y_n| \to |x| + |y|$ jeweils für $n \to \infty$. Wegen $|x_n| + |y_n| \in [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (und weil $[0,1]$ abgeschlossen ist), folgt $|x| + |y| \in [0,1]$. Das bedeutet $(x,y) \in B$.
Weil B beschränkt und abgeschlossen ist, ist B *kompakt.*
B ist *nicht offen*: Es gilt $(1,0) \in B$, aber $(1, \frac{1}{n}) \notin B$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn $|1| + |\frac{1}{n}| > 1$. Das zeigt, dass für kein $r > 0$ die Kugel $U_r(1,0)$ in B enthalten ist. □

Aufgabe 2 Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xz^2}{x^2 + y^2 + z^2}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) f ist stetig.

(b) Für alle $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = 1$ existiert die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0,0)$.

(c) f ist nicht differenzierbar in $(0,0,0)$.

Lösung. (a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f stetig auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Zu zeigen ist Stetigkeit in $(0,0,0)$. Sei $\big((x_k, y_k, z_k)\big)$ eine Folge in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ die gegen $(0,0,0)$ konvergiert. Insbesondere konvergieren die Komponenten dieser Folge.
Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $z_k = 0$ haben wir $f(x_k, y_k, z_k) = 0$. Falls $z_k \neq 0$, dann gilt wegen $x_k^2, y_k^2 \geq 0$, dass

$$|f(x_k, y_k, z_k)| = \frac{|x_k z_k^2|}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \leq \frac{|x_k| z_k^2}{z_k^2} = |x_k| \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Das zeigt, dass $f(x_k, y_k, z_k) \to 0$ für $k \to \infty$ und damit, dass f stetig in $(0,0,0)$ ist.

(b) Sei $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = 1$. Für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$f(tv) = \frac{t^3 v_1 v_3^2}{t^2 \|v\|^2} = t v_1 v_3^2.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{t}\big(f(tv) - f(0)\big) = v_1 v_3^2 \to v_1 v_3^2 \quad \text{für } t \to 0.$$

Also existiert die Richtungsableitung und es gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0,0) = v_1 v_3^2$.

(c) Nach Teil (b) ist der Gradient von f im Ursprung $\operatorname{grad} f(0,0,0) = (0,0,0)$. Er liefert den einzigen Kandidaten für $f'(0)$. Betrachte die Nullfolge (h_k) mit den Gliedern $h_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ für $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\frac{1}{\|h_k\|}|f(h_k) - f(0) - (0,0,0)h_k| = \frac{1}{\sqrt{3}\frac{1}{k}} \frac{\frac{1}{k}\frac{1}{k^2}}{3\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Weil diese Folge nicht gegen Null konvergiert, ist f nicht differenzierbar in $(0,0,0)$. □

Aufgabe 3 Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f(x,y) = x^3 - y^2 + 2xy - x.$$

Untersuchen Sie jeweils ob f an diesen Stellen ein lokales Minimum oder Maximum hat.
Hinweis für Hörer von Prof. Schnaubelt: "stationär" ist hier gleichbedeutend mit "kritisch".

Lösung. Die stationären Punkte von f sind die Nullstellen der ersten Ableitung. Wir berechnen

$$f'(x,y) = (3x^2 + 2y - 1, -2y + 2x).$$

Also ist $f'(x,y) = (0,0)$ genau dann, wenn $x = y$ und $3x^2 + 2x - 1 = 0$. Wir erhalten

$$f'(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y = \frac{-2}{6} + \frac{\sqrt{4+12}}{6} = \frac{1}{3} \text{ oder } x = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1.$$

Die stationären Punkte sind also $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ und $(-1,-1)$.
Wir berechnen auch die Hessematrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Es folgt

$$H_f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Da $\det H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -4 < 0$ ist $H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ indefinit und damit hat f in $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ kein lokales Extremum.
Weil $-6 < 0$ und $\det H_f(-1,-1) = 8 > 0$, ist $H_f(-1,-1)$ negativ definit und damit besitzt f in $(-1,-1)$ ein lokales Maximum. □

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}$ von 1 und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(2,0)$ sowie eine Funktion $g \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ mit $g(1) = (2,0)$ gibt derart, dass alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y_1^2 - x\sin(y_2) &= 5 \\ x^5 - y_1 &= -1 \end{aligned}$$

in $U \times V$ durch $(x, g(x))$ mit $x \in U$ gegeben sind. Berechnen Sie $g'(1)$.

Lösung. Betrachte $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x + y_1^2 - x\sin(y_2) - 5 \\ x^5 - y_1 + 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $F(x, y_1, y_2) = (0,0)$ genau dann, wenn (x, y_1, y_2) das Gleichungssystem aus der Aufgabenstellung erfüllt. Insbesondere ist $F(1,2,0) = (0,0)$. Als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen ist $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Wir berechnen

$$\frac{\partial F}{\partial(y_1, y_2)}(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2y_1 & -x\cos(y_2) \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5x^4 \end{pmatrix}$$

für $(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3$. Es gilt

$$\det \frac{\partial F}{\partial(y_1, y_2)}(1,2,0) = \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Also ist $\frac{\partial F}{\partial(y_1,y_2)}(1,2,0)$ invertierbar. Der Satz über implizit definierte Funktionen liefert die Behauptung. Weiter gilt

$$g'(1) = -\left(\frac{\partial F}{\partial(y_1, y_2)}(1,2,0)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,0) = -\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 21 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Aufgabe 5 (a) Seien $\gamma : [-1, \sqrt{\pi + 1}] \to \mathbb{R}^2$; $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ y\cos(x) \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma f(x,y) \cdot \mathrm{d}(x,y).$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2y - \frac{2x}{x^2+1} \\ 4 - x^3 - \mathrm{e}^{-y} \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass f eine Stammfunktion besitzt und bestimmen Sie diese.

Hinweise für Hörer von Prof. Schnaubelt: In (a) ist das Wegintegral 2. Art von f über $\Gamma = \gamma([0, \sqrt{\pi+1}])$ zu berechnen. In (b) ist "Stammfunktion" gleichbedeutend mit "Potential".

Lösung. (a) Die Komponentenfunktionen von γ sind stetig differenzierbar, also gilt $\gamma \in C^1([-1, \sqrt{\pi+1}], \mathbb{R}^2)$. Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in [-1, \sqrt{\pi+1}].$$

Die Funktion f ist stetig als Komposition stetiger Abbildungen. Weiter gilt

$$f(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 - t^2 \\ t\cos(t^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ t\cos(t^2-1) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [-1, \sqrt{\pi+1}]$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(x,y) \cdot \mathrm{d}(x,y) &= \int_{-1}^{\sqrt{\pi+1}} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{\sqrt{\pi+1}} -2t + t\cos(t^2-1)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-t^2 + \tfrac{1}{2}\sin(t^2-1)\right]_{-1}^{\sqrt{\pi+1}} = -(\pi+1) + \tfrac{1}{2}\sin(\pi) + 1 - \tfrac{1}{2}\sin(0) = -\pi \end{aligned}$$

(b) Es ist klar, dass $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Weiter gilt

$$\partial_2 f_1(x,y) = -3x^2 = \partial_1 f_2(x,y) \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Damit ist die Integrabilitätsbedingung für f erfüllt. Weil $\mathbb{R}^2$ konvex ist (und damit sternförmig) ist die Existenz einer Stammfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von f gesichert. (Auch die folgende Konstruktion einer Stammfunktion ist eine Beweis für deren Existenz.) Es gilt

$$\partial_1 F(x,y) = f_1(x,y) = -3x^2 y - \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Hieraus folgt, dass $F(x,y) = -x^3 y - \log(x^2+1) + g(y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ für eine Funktion $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Wir erhalten

$$-x^3 + g'(y) = \partial_2 F(x,y) = f_2(x,y) = 4 - x^3 - \mathrm{e}^{-y} \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sodass $g'(y) = 4 - \mathrm{e}^{-y}$ bzw. $g(y) = 4y + \mathrm{e}^{-y} + c$ für alle $y \in \mathbb{R}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Wir erhalten

$$F(x,y) = y(4 - x^3) - \log(x^2+1) + \mathrm{e}^{-y}.$$

□

Aufgabe 6 (a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems mit maximalem Definitionsbereich.

$$y'(x) = \frac{1}{y(x)}\sqrt{1 - y^2(x)}, \quad y(0) = \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \sqrt{y_2(x) - 1} + x^2 y_1^2(x), & y_1(0) &= y_{0,1} \\ y_2'(x) &= \tfrac{1}{2} y_1(x) \sin(x\, y_2(x)) & y_2(0) &= y_{0,2} \end{aligned}$$

für alle $y_0 = (y_{0,1}, y_{0,2}) \in \mathbb{R} \times (1, \infty)$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Lösung. (a) Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Wir setzen $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $f(x) = 1$ und $g \in C((0,1),\mathbb{R})$; $g(v) = \frac{\sqrt{1-v^2}}{v}$. Die Differentialgleichung lässt sich schreiben als $y' = f(x)g(y)$.
Da $g(v) \neq 0$ für alle $v \in (0,1)$, existiert die nicht fortsetzbare Lösung $y \in C(I_0,\mathbb{R})$ des Anfangswertproblems auf einem Intervall $I_0 \subseteq \mathbb{R}$. Sie erfüllt

$$x - 0 = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{\frac{3}{4}}}^{y(x)} \frac{1}{g(v)}\,\mathrm{d}v = \int_{\sqrt{\frac{3}{4}}}^{y(x)} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,\mathrm{d}v = \left[-\sqrt{1-v^2}\right]_{\sqrt{\frac{3}{4}}}^{y(x)}$$
$$= \sqrt{1-\tfrac{3}{4}} - \sqrt{1-(y(x))^2} = \tfrac{1}{2} - \sqrt{1-(y(x))^2}$$

für alle $x \in I_0$. Da $y(x) \in (0,1)$ für alle $x \in I_0$, folgt

$$\tfrac{1}{2} - x = \sqrt{1-(y(x))^2} \quad \Longleftrightarrow \quad y(x) = \sqrt{1-(\tfrac{1}{2}-x)^2}$$

Die rechte Seite liefert eine C^1-Funktion falls $1 - (\frac{1}{2}-x)^2 > 0 \Longleftrightarrow |\frac{1}{2}-x| < 1$. Somit ist $I_0 = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

(b) Definiere $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (1,\infty) \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,v,w) = \begin{pmatrix} \sqrt{w-1} + x^2v^2 \\ \frac{1}{2}v\sin(xw) \end{pmatrix}.$$

Dann lässt sich die Differentialgleichung schreiben als $y' = f(x,y)$. Als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen ist f stetig differenzierbar. Insbesondere erfüllt f eine lokale Lipschitz-Bedingung bezüglich (v,w). Der Satz von Picard-Lindelöf (lokale Version) liefert die Behauptung. □

Aufgabe 7 Seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung $y' = Ay$ und eine Lösung $y \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ des Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(0) = y_0$.
Hinweis für Hörer von Prof. Schnaubelt: "Fundamentalmatrix" ist hier gleichbedeutend mit "Fundamentallösung".

Lösung. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\det\begin{pmatrix} X & -1 & 1 \\ 1 & X & 3 \\ 0 & 0 & X+3 \end{pmatrix} = X^2(X+3) + (X+3) = (X^2+1)(X+3).$$

Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$ und $\lambda_3 = -\mathrm{i}$. Wir bestimmen die zu λ_1 und λ_2 gehörenden Eigenvektoren. Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Kern}(A-\lambda_1) &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 0 & 10 & -10\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = [\begin{pmatrix}0\\ -1\\ -1\end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}].\end{aligned}$$

Eine Lösung der Differentialgleichung ist $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$;

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-3x}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{e}^{-3x}\\ \mathrm{e}^{-3x}\end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Kern}(A-\lambda_2) &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & 1 & -1\\ -1 & -\mathrm{i} & -3\\ 0 & 0 & -3-\mathrm{i}\end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i}\\ 0 & 0 & -3-\mathrm{i}\\ 0 & 0 & -3-\mathrm{i}\end{pmatrix}\\ &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = [\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\ -1\\ 0\end{pmatrix}].\end{aligned}$$

Die zum Eigenwert λ_2 gehörende komplexe Lösung ist also $\tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$;

$$\tilde{y}(x) = \mathrm{e}^{0+\mathrm{i}x}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = (\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin(x)\\ -\cos(x)\\ 0\end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix}\cos(x)\\ -\sin(x)\\ 0\end{pmatrix}$$

Ihr Real- und Imaginärteil liefern die reellen Lösungen $y_2, y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y_2(x) = \begin{pmatrix}-\sin(x)\\ -\cos(x)\\ 0\end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad y_3(x) = \begin{pmatrix}\cos(x)\\ -\sin(x)\\ 0\end{pmatrix}$$

Eine Fundamentalmatrix von $y'(x) = Ay(x)$ ist somit $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$;

$$Y(x) = \begin{pmatrix}0 & -\sin(x) & \cos(x)\\ \mathrm{e}^{-3x} & -\cos(x) & -\sin(x)\\ \mathrm{e}^{-3x} & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$;

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) = Y(x)\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}.$$

Die Anfangsbedingung wird von y erfüllt, wenn

$$y(0) = Y(0)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die erste und die dritte Zeile dieses linearen Gleichungssystems liefern $c_3 = 1$ und $c_1 = 2$. Die zweite Zeile impliziert dann, dass $2 - c_2 = c_1 - c_2 = 1$ also $c_2 = 1$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist damit

$$y(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x) + \cos(x) \\ 2\mathrm{e}^{-3x} - \cos(x) - \sin(x) \\ 2\mathrm{e}^{-3x} \end{pmatrix}. \qquad \square$$