Ana 2 SoSe 2019

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 1:

(i) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\sqrt{\ln 4}} 3xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\pi} \cos(2x)e^x\,\mathrm{d}x\,.$$

Hinweis: ln bezeichnet den natürlichen Logarithmus log.

(ii) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

auf Konvergenz bzw. Divergenz und berechnen Sie es gegebenenfalls.

Lösungsvorschlag:

(i) a) *Behauptung:* Es gilt

$$\int_0^{\sqrt{\ln 4}} 3xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{8}.$$

Beweis: Die Funktion $f(x) := 3xe^{-x^2}$ ist stetig, somit Regelfunktion und durch Treppenfunktionen in der Supremumsnorm approximierbar. (Ebenso ist f Riemann integrierbar) Also existiert das gesucht Integral. Wir substituieren $t = t(x) = x^2$. Mit $t'(x) = 2x$ und der Transformation der Integralgrenzen $t(0) = 0$ und $t(\sqrt{\ln 4}) = \ln 4$ erhalten wir mit Hilfe der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\ln 4}} 3xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\ln 4} \frac{3}{2}e^{-y}\,\mathrm{d}y = [-\frac{3}{2}e^{-y}]_0^{\ln 4} \\ &= -\frac{3}{8} + \frac{3}{2} = \frac{9}{8}.\end{aligned}$$

b) *Behauptung:* Es gilt

$$\int_0^{\pi} \cos(2x)e^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(e^\pi - 1).$$

Beweis: Die Funktion $f(x) := \cos(2x)e^x$ ist stetig, somit Regelfunktion und durch Treppenfunktionen in der Supremumsnorm approximierbar. (Ebenso ist f Riemann integrierbar) Also existiert das gesucht Integral. Durch zweimaliges Anwenden der partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos(2x)e^x\,\mathrm{d}x &= [\frac{1}{2}\sin(2x)e^x]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin(2x)e^x\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + [\frac{1}{4}\cos(2x)e^x]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{4}\cos(2x)e^x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}(e^\pi - 1) - \frac{1}{4}\int_0^\pi \cos(2x)e^x\,dx\,.\end{aligned}$$

Lösungen A Analysis II, September 2019

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Somit ist

$$\frac{5}{4}\int_0^{\pi} \cos(2x)e^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(e^\pi - 1),$$

also

$$\int_0^{\pi} \cos(2x)e^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(e^\pi - 1).$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\,.$$

Beweis: Lösungsvariante 1: Mit der Substitution $y = y(x) = \sqrt{x}$ erhält man wegen $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, dass

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty 2e^{-y}\,\mathrm{d}y = -2\Big[e^{-y}\Big]_0^\infty.$$

Rücksubstituieren ergibt

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -2\Big[e^{-\sqrt{x}}\Big]_0^\infty = 2\,.$$

Lösungsvariante 2: Da $x \mapsto -2e^{-\sqrt{x}}$ eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}$ ist, erhält man

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -2\Big[e^{-\sqrt{x}}\Big]_0^\infty = 2\,.$$

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 2:

(i) Zeigen Sie, dass die Menge

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ |y| \le \min\left\{1, \frac{1}{x^2}\right\}, 0 < x < 5\right\}$$

weder abgeschlossen noch offen ist.

(ii) Untersuchen Sie die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ auf Beschränktheit, Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit.

$$B := \left\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \colon 1 < x < 5\,,\, 2 \le y \le x^2\right\}$$

Lösungsvorschlag:

(i) *Behauptung:* M_1 ist nicht offen.

Beweis:. Nach Definition von M_1 gilt $z := (\frac{1}{2}, 1) \in M_1$. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt jedoch $(\frac{1}{2}, 1+\varepsilon) \notin M_1$ und somit gilt $U_\delta(z) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus M_1) \neq \emptyset$ für alle $\delta > 0$, d.h. M_1 ist nicht offen. □

Behauptung: M_1 ist nicht abgeschlossen.

Beweis:. Wir zeigen, dass das Komplement $M_1^c := \mathbb{R}^2 \setminus M_1$ nicht offen ist. Nach Definition von M_1^c gilt $z := (5,0) \in M_1^c$ (denn es gilt $z \notin M_1$). Für alle $0 < \varepsilon < 5$ gilt jedoch $(5-\varepsilon, 0) \notin M_1^c$ (denn es gilt $(5-\varepsilon,0) \in M_1$) und somit gilt $U_\delta(z) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus M_1^c) = U_\delta(z) \cap M_1 \neq \emptyset$ für alle $\delta > 0$, d.h. M_1^c ist nicht offen. Somit ist M_1 nicht abgeschlossen. □

Hinweis: Man könnte auch mit Folgen argumentieren. Die Folge $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $(x_n, y_n) := (5 - \frac{1}{n}, 0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist eine Folge in M_1. Außerdem gilt $(x_n, 0) \to (5,0)$ für $n \to \infty$. Allerdings gilt $(5,0) \notin M_1$, d.h. M_1 ist nicht abgeschlossen.

(ii) *Behauptung:* $B := \left\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \colon 1 < x < 5, 2 \le y \le x^2\right\}$ ist beschränkt und abgeschlossen aber nicht offen.

Wir beweisen zunächst die Beschränktheit und die Abgeschlossenheit, also das B kompakt ist.

Beweis:. Nach der Definition von B gilt $2 \le y \le x^2 < 5^2 = 25$, d.h. es gilt $B \subset \{1, \dots, 5\} \times \{1, \dots, 25\}$. Damit ist B eine endliche Menge und daher insbesondere beschränkt. Als Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist B außerdem abgeschlossen. □

Behauptung: B ist nicht offen.

Beweis:. Nach Definition gilt $(2,2) \in B$. Jedoch ist für kein $\delta > 0$ die Umgebung $U_\delta(2,2)$ in B enthalten, d.h. B ist nicht offen. □

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Achtung!!!
Bitte bearbeiten Sie nur eine der folgenden Aufgaben. Je nachdem ob Sie Hörer der Analysis 2 im SoSe 19 bei Professor Hundertmark oder Hörer der Analysis 2 im SoSe 18 bei Professor Plum waren. Diejenigen von Ihnen die beide Veranstaltungen gehört haben bearbeiten bitte Aufgabe 3.

Aufgabe 3:

(i) Geben Sie die Definition einer Metrik an.

(ii) Sei (X,d) ein metrischer Raum, $\emptyset \neq A \subset X$ und $f : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist.

b) Was ist die zugehörige Lipschitz-Konstante?

Alternativ Aufgabe für die Hörer Analysis 2 im SoSe 18 bei Professor Plum:

Aufgabe 3':
Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + y' - 2y = 2x(1-x)\,, \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\,, \\ y''(0) = 5\,, \end{cases}$$

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 3)

(i) Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : X \to X$ heißt Metrik auf X, wenn für beliebige Elemente $x, y \in X$ die folgenden Axiome erfüllt sind:

- Positive Definitheit: $d(x,y) \ge 0$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- Symmetry: $d(x,y) = d(y,x)$,
- Dreiecksungleichung: $d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z)$,
  wobei $z \in X$ beliebig aber fest gewählt ist.

(ii) Sei (X,d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ und $f : X \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y)$.

a) Sei $x, y \in X$ beliebig. Dann gilt für alle $a \in A$

$$\begin{aligned} d(y,a) &\leq d(y,x) + d(x,a)\,, \\ d(x,a) &\leq d(x,y) + d(y,a)\,. \end{aligned}$$

Betrachten wir also nun das Infimum über alle $a \in A$ so folgt

$$\begin{aligned} f(y) = d(y,A) = \inf_{a\in A} d(y,a) =\leq d(y,x) + \inf_{a\in A} d(x,a) &= d(y,x) + f(x) \\ f(x) = \inf_{a\in A} d(x,a) &\leq d(x,y) + f(y) \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$|f(x) - f(y)| \leq |(d(x,y) + f(y)) - f(x))| = d(x,y)\,.$$

Also ist f Lipschitz-stetig. □

b) Die zugehörige Lipschitzkonstante ist $L = 1$.

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 3')

Wir betrachten wir zunächst das homogenen Systems. Wir verwenden den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ und erhalten

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 2)(\lambda - i)(\lambda + i) = 0\,.$$

Somit ergibt sich die homogene Lösung

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 \sin(x) + c_3 \cos(x)\,.$$

Nun zur partikulären Lösung. Als Ansatz nehmen wir $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$. Damit gilt

$$\begin{aligned} 2x - 2x^2 &\stackrel{!}{=} -4A + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + bx + C) \\ &= -2Ax^2 + (2A - 2B)x + (-4A + B - 2C) \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich sieht man sofort

$$-2A \stackrel{!}{=} -2\,, \qquad 2A - 2B \stackrel{!}{=} 2 \qquad \text{und} \qquad -4A + B - 2C \stackrel{!}{=} 0$$

Also $A = 1$, $B = 0$ und $C = -2$ und die partikuläre Lösung ist

$$y_p(x) = x^2 - 2\,.$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 \sin(x) + c_3 \cos(x) + x^2 - 2$$

Für die erste und zweite Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2c_1 e^{2x} + c_2 \cos(x) - c_3 \sin(x) + 2x \\ y''(x) &= 4c_1 e^{2x} - c_2 \sin(x) - c_3 \cos(x) + 2 \end{aligned}$$

Durch einsetzen der jeweiligen Anfangsbedingungen erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_3 - 2 \\ 1 &= 2c_1 + c_2 \\ 5 &= 4c_1 - c_3 + 2 \end{aligned}$$

Also $c_1 = c_3 = 1$ und $c_2 = -1$. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet somit

$$y(x) = e^{2x} - \sin(x) + \cos(x) + x^2 - 2\,.$$

1

Aufgabe 4:

Definiere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

(ii) Berechnen Sie in jedem Punkt die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ von f, falls sie existieren.

(iii) Sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ im Punkt $(0,0)$ stetig?

Lösungsvorschlag:

(i) *Behauptung*: Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.
Beweis: Zunächst ist $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig, und da $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ offen ist, ist auch f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig. Es bleibt also nur noch die Stetigkeit in $(0,0)$ zu zeigen. Sei dazu $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dann gilt

$$m_k := \max\{|x_k|\,, |y_k|\} \xrightarrow{k\to\infty} 0\,,$$

und es folgt:

$$|f(x_k, y_k)| \leq \frac{|y_k^3| + |x_k^2 y_k|}{x_k^2 + y_k^2} \leq \frac{m_k^3 + m_k^3}{m_k^2} = 2m_k \xrightarrow{k\to\infty} 0\,.$$

Dies bedeutet $f(x_k, y_k) \to 0 = f(0,0)$ für $k \to \infty$. Also ist f auch in $(0,0)$ stetig. □

(ii) Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dann ist f als Quotient von partiell differenzierbaren Funktionen im Punkt (x,y) nach der Quotientenregel partiell differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

(Denn: beim Ableiten nach x wird y als Konstante betrachtet). Analog ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^2y^2 - x^4 + y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0,0)$ rechnen wir hingegen direkt die Definition der partiellen Ableitung nach: Es gilt

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0 \to 0 \quad \text{für } t \to 0,$$

also ist f in $(0,0)$ partiell nach x differenzierbar mit $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$. Außerdem gilt

$$\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3 - 0}{0 + t^2} = 1 \to 1 \quad \text{für } t \to 0,$$

also ist f in $(0,0)$ auch partiell nach y differenzierbar mit $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 1$.

1

Name: Matrikelnummer: Punkte:

(iii) Die partiellen Ableitungen sind in $(0,0)$ unstetig, denn es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\tfrac{1}{k},\tfrac{1}{k}\right) = -\frac{4k^{-4}}{(k^{-2}+k^{-2})^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\tfrac{1}{k},0\right) = \frac{0-k^{-4}+0}{(k^{-2}+0)^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,.$$

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 5:
Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1,x_2) := x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2$ und $a := \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)\in\mathbb{R}^2$.

(i) Zeigen Sie, dass für jedes $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial a}(x_1,x_2)$ existiert und berechnen Sie diese.

(ii) Sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ definiert durch $g(t) := (\cos t,\sin t)$. Zeigen Sie, dass $h := f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

Lösungsvorschlag:

(i) Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1,x_2) := x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2$ und $a := \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)\in\mathbb{R}^2$.
Behauptung: Für jedes $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial a}(x_1,x_2)$ und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(12x_1+17x_2)\,.$$

Beweis: Die Funktion f ist differenzierbar mit

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1+5x_2 \\ 5x_1+6x_2 \end{pmatrix}.$$

Damit existiert in jedem Punkt von $\mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung in jede Richtung und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial a}(x_1,x_2) &= \nabla f(x_1,x_2)^T\cdot a = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2x_1+5x_2 & 5x_1+6x_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1+5x_2+2(5x_1+6x_2)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(12x_1+17x_2)\,.\end{aligned}$$

(ii) Sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ definiert durch $g(t) := (\cos t,\sin t)$.
Behauptung: $h := f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist differenzierbar und es gilt

$$h'(t) = -5\sin^2 t+4\sin t\cos t+5\cos^2 t.$$

Beweis: g ist differenzierbar mit $g'(t) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$ für alle $t\in\mathbb{R}$. Laut Kettenregel ist damit auch h differenzierbar und für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(g(t))g'(t) = \nabla f(\cos t,\sin t)^T\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2\cos t+5\sin t & 5\cos t+6\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\\ &= -2\cos t\sin t-5\sin^2 t+5\cos^2 t+6\sin t\cos t\\ &= -5\sin^2 t+4\sin t\cos t+5\cos^2 t\,.\end{aligned}$$

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 6:
Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \cos(x) + y(y + 2).$$

(i) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von $f : D \to \mathbb{R}$.

(ii) Sei (x_0, y_0) einer der kritischen Punkte von f. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f um den Entwicklungspunkt (x_0, y_0).

Lösungsvorschlag: Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \cos(x) + y(y + 2).$$

(i) a) Zur Bestimmung der lokalen Extrema suchen wir zuerst die kritischen Punkte, d.h. $p \in D$ mit

$$D_p f = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ 2y + 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Dies ergibt $y = -1$ und $\sin(x) = 0$. Also $x = k\pi$, für $k \in \mathbb{N}_0$ (da $xy \leq 0$). Die Hesse-Matrix ist

$$H(f) = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir für die kritischen Punkte

$$H_{(k\pi,-1)}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{falls } k \text{ gerade}$$
$$H_{(k\pi,-1)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{falls } k \text{ ungerade}$$

Im ersten Fall sind es somit Sattelpunkte, da $\det H(f) < 0$. Im zweiten Fall lokale Minima, da $\det H(f) > 0$ und $H(f)_{(k\pi,-1)} > 0$.

$$f(k\pi, -1) = -1 - 1 = -2, \qquad \text{für } k \text{ ungerade}.$$

b) Nun zu den globalen Extrema. Da $\cos(x) \geq -1$ kann f bzgl. x nicht kleiner werden als im lokalen Minima. Weiterhin gilt $y(y+2) = y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1 \geq -1$, somit sind die liokalen Minima auch globale Minima.

Zur Bestimmung des globalen Maxima für $(x, y) \to \pm\infty$ reicht es, das Verhalten für $y \to \pm\infty$ zu betrachten, da $\cos(x) \in [-1, 1]$. Für $y \to \pm\infty$ gilt $f(x, y) \to \infty$, somit gibt es kein globales Maximum.

Name: Matrikelnummer: Punkte:

(ii) Damit erhält man für das Taylorpolynom 2. Grades von f in einem der Minima, z.B. $p = (\pi, -1)$:

$$\begin{aligned} T_p f(x) &= f(p) + \langle \nabla f(p), (x - p) \rangle + \frac{1}{2} \langle (x - p), H_p(f)(x - p) \rangle \\ &= -2 + 0 + \frac{1}{2} \langle \begin{pmatrix} x_1 - \pi \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \pi \\ x_2 + 1 \end{pmatrix} \rangle \\ &= -2 + \frac{1}{2}((x_1 - \pi)^2 + 2(x_2 + 1)^2) \\ &= -2 + \frac{1}{2}(x_1 - \pi)^2 + (x_2 + 1)^2 \end{aligned}$$

Alternativ im Sattelpunkt $p = (0, -1)$:

$$\begin{aligned} T_p f(x) &= f(p) + \langle \nabla f(p), (x - p) \rangle + \frac{1}{2} \langle (x - p), H_p(f)(x - p) \rangle \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix} \rangle \\ &= \frac{1}{2}(x_1^2 + 2(x_2 + 1)^2) \\ &= \frac{1}{2} x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \end{aligned}$$

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 7:
Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(2,5)$ und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(-1,0)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}^2$ so gibt, dass alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 + uy + e^v &= 0, \\ 2x + u^2 - uv &= 5 \end{aligned}$$

in $U \times V$ durch $(x, y, g(x,y))$ mit $(x,y) \in U$ gegeben sind. Berechnen Sie $g'(2,5)$.

Lösungsvorschlag: Um den Satz über implizit definierte Funktionen anwenden zu können, definieren wir die Abbildung $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} x^2 + uy + e^v \\ 2x + u^2 - uv - 5 \end{pmatrix}$$

Offenbar löst ein Tupel $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$ genau dann das Gleichungssystem aus der Aufgabenstellung, wenn $F(x,y,u,v) = (0,0)$ gilt. Beachte, dass auch $F(2,5,-1,0) = (4-5+1, 4+1-5) = (0,0)$. Weiter ist klar, dass F stetig partiell differenzierbar ist und wir berechnen

$$F'(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2x & u & y & e^v \\ 2 & 0 & 2u - v & -u \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(2,5,-1,0) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat die Determinante $7 \neq 0$ und ist somit invertierbar. Ihre Inverse ist

$$\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(2,5,-1,0)\right)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen gibt es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(2,5)$ und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(-1,0)$, sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U \to V$ mit $g(2,5) = (-1,0)$ und $F(x,y,g(x,y)) = 0$ für alle $(x,y) \in U$. Die Eindeutigkeitsaussage ist ebenfalls Teil des Satzes über implizit definierte Funktionen. Schließlich gilt noch die Formel für die Ableitung

$$g'(2,5) = -\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(2,5,-1,0)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(2,5,-1,0) = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 18 & -2 \end{pmatrix}.$$

11 Zi