Schnaubelt
Analysis II

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell

Die Aufgaben 1 und 1' sind alternativ gestellt.
Es wird nur die Bearbeitung **einer** dieser Aufgaben gewertet.

Aufgabe 1 (Empfohlen für Hörer*innen von Prof. Dr. Schnaubelt)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\text{(i)} \int_0^1 x^2 2^x \,\mathrm{d}x \qquad \text{(ii)} \int_1^e \frac{\ln(x)^2 - x}{x} \,\mathrm{d}x$$

b) Untersuchen Sie, ob das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x\ln(x)}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

existiert.

Aufgabe 1' (Empfohlen für Hörer*innen von Prof. Dr. Lamm)

Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie die Matrizenexponentialfunktion e^{tA} für $t \geq 0$.

Die Aufgaben 2 und 2' sind alternativ gestellt.
Es wird nur die Bearbeitung **einer** dieser Aufgaben gewertet.

Aufgabe 2 (Empfohlen für Hörer*innen von Prof. Dr. Schnaubelt)

a) Untersuchen Sie, ob die Menge

$$M := \left\{ (x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ \left|\sin(x^2)\right| \geq y \right\}$$

offen, abgeschlossen oder kompakt ist.

b) Bestimmen Sie den Abschluss der Menge

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \exists t \in [0,\infty) \colon (1-\mathrm{e}^{-t}) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

und begründen Sie dies.

Aufgabe 2' (Empfohlen für Hörer*innen von Prof. Dr. Lamm)

Sei

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ f(x,y,z) = x^2 + 6y - z\,.$$

Bestimmen Sie $\min_{(x,y,z)\in\overline{B}(0,1)} f(x,y,z)$ und $\max_{(x,y,z)\in\overline{B}(0,1)} f(x,y,z)$.

Aufgabe 3 Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^4}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,, \\ 0, & (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

gegeben.

a) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit in $(0,0)$.

b) Berechnen Sie alle Richtungsableitungen $\partial_v f(0,0)$ für $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

c) Untersuchen Sie f auf Differenzierbarkeit in $(0,0)$.

Aufgabe 4 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;

$$f(x,y) := x^3 - 6xy + y^2$$

gegeben. Bestimmen Sie alle Minimalstellen und alle Maximalstellen von f. Entscheiden Sie, ob die Extrema lokal oder global sind.

Aufgabe 5 Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{xz} y - 2yz &= 1\,, \\ y^3 z + \mathrm{e}^{z-1}(y^2+y) &= -1\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass es Umgebungen $U_z \subseteq \mathbb{R}$ von $z_0 = 1$ und $U_{x,y} \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(x_0, y_0) = (0,-1)$ gibt und eine Funktion $\varphi \in C^1(U_z, U_{x,y})$ so existiert, dass $(x,y,z) \in U_{x,y} \times U_z$ genau dann (1) löst, wenn $\varphi(z) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gilt. Berechnen Sie die Ableitung von φ bei $z_0 = 1$.

Aufgabe 6 Untersuchen Sie jeweils, ob die Vektorfelder F Potentiale besitzen und geben Sie diese gegebenenfalls an. Berechnen Sie weiter die Kurvenintegrale $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}x$. Die Vektorfelder F und die Kurven γ seien gegeben durch

a) $F\colon \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$; $F(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ \sqrt{x_2} \end{pmatrix}$ und $\gamma\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$,

b) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $F(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 + 2 \\ x_1^2 + 4x_3 \mathrm{e}^{x_2x_3} \\ 4x_2 \mathrm{e}^{x_2x_3} \end{pmatrix}$ und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$; $t \mapsto \begin{pmatrix} t+1 \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7 Es sei das System

$$\begin{aligned} u'(t) &= -u(t)^3 + v(t)w(t), && t \geq 0, \\ v'(t) &= u(t)^3 - v(t)w(t), && t \geq 0, \\ w'(t) &= -v(t)w(t), && t \geq 0, \end{aligned}$$

mit Anfangswerten $u(0) = u_0, v(0) = v_0, w(0) = w_0$, $u_0, v_0, w_0 \geq 0$, gegeben. Zeigen Sie, dass eine eindeutige, nicht-negative Lösung (u,v,w) für alle Zeiten $t \in [0,\infty)$ existiert.

Aufgabe 1 (Empfohlen für Hörer*innen von Prof. Dr. Schnaubelt)

a) (i) *Behauptung.* $\int_0^1 x^2 2^x \, \mathrm{d}x = \frac{2(\ln(2)-1)^2}{\ln(2)^3}$

Beweis. Die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^2,\ g(x) = 2^x = \mathrm{e}^{\ln(2)x}$ sind offenbar glatt. Mit zweifacher partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underset{\downarrow}{x^2} \underset{\uparrow}{2^x} \, \mathrm{d}x &\overset{\text{PI}}{=} \left[x^2 \tfrac{1}{\ln(2)} \mathrm{e}^{\ln(2)x}\right]_{x=0}^{x=1} - \tfrac{2}{\ln(2)} \int_0^1 \underset{\downarrow}{x} \underset{\uparrow}{\mathrm{e}^{\ln(2)x}} \, \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{PI}}{=} \tfrac{2}{\ln(2)} - \tfrac{2}{\ln(2)} \left(\left[x \tfrac{1}{\ln(2)} \mathrm{e}^{\ln(2)x}\right]_{x=0}^{x=1} - \tfrac{1}{\ln(2)} \int_0^1 \mathrm{e}^{\ln(2)x} \, \mathrm{d}x \right) \\
&= \tfrac{2}{\ln(2)} - \tfrac{2}{\ln(2)^2} \left(2 - \tfrac{1}{\ln(2)} (2-1)\right) \\
&= \frac{2\ln(2)^2 - 4\ln(2) + 2}{\ln(2)^3} = \frac{2(\ln(2)-1)^2}{\ln(2)^3}
\end{aligned}$$

□

(ii) *Behauptung.* $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)^2 - x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{4}{3} - \mathrm{e}$

Beweis. Es gilt $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)^2 - x}{x} \, \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)^2}{x} \, \mathrm{d}x - (\mathrm{e} - 1)$. Substituiert man nun "$u = \ln(x)$, $\mathrm{d}u = \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$", so folgt weiter

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)^2}{x} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 u^2 \, \mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{3} u^3\right]_{u=0}^{u=1} = \tfrac{1}{3}\,.$$

Insgesamt ist also $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)^2 - x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} - (\mathrm{e} - 1) = \frac{4}{3} - \mathrm{e}$. □

b) *Behauptung.* Das Integral $\int_0^\infty \frac{x\ln(x)}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$ existiert nicht.

Beweis. Es handelt sich um ein uneigentliches Integral. Nach Vorlesung wissen wir, dass $\int_1^\infty x^\gamma \, \mathrm{d}x$ genau dann konvergiert, wenn $\gamma < -1$. Weiter gilt $\int_0^\infty \frac{x\ln(x)}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{e}} \frac{x\ln(x)}{1+x^2} \, \mathrm{d}x + \int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{x\ln(x)}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$. (Da $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, ist der Integrand auf $[0, e]$ stetig fortsetzbar. Insbesondere existiert das vordere Integral.) Weiter schätzen wir ab

$$\int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{x\ln(x)}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \geq \int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{x}{2x^2} \, \mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{1}{2x} \, \mathrm{d}x\,.$$

Nach dem Minorantenkriterium divergiert damit das hintere Integral und die Behauptung folgt. □

Aufgabe 1' (Empfohlen für Hörer*innen von Prof. Dr. Lamm)

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 1'). Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte von A. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom CP_A

$$\det(\lambda I - A) = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 7 & -16 \\ 1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

Die Matrix A besitzt also den Eigenwert $\lambda = 3$ mit algebraischer Vielfachheit $\mu_a = 2$. Nun bestimmen wir den zugehörigen Eigenraum. Für $x = (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$(3I - A)x = 0 \iff \begin{pmatrix} -4 & -16 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff x_1 = -4x_2$$

Der Eigenraum hat also Dimension 1 (mit anderen Worten hat $\lambda = 3$ die geometrische

Vielfachheit $\mu_g = 1$) und wird aufgespannt durch $E_3 = \langle\left\{\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}\right\}\rangle$. Um die Jordan-Normalform von A zu bestimmen benötigen wir für den Basiswechsel einen geeigneten Hauptvektor. Es gilt

$$(A-3I)x = \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}4 & 16\\-1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} \iff x_1 = -1-4x_2$$

Wählen wir beispielsweise $x_1 = -1, x_2 = 0$, so ist die Jordan-Normalform gegeben durch

$$\begin{pmatrix}7 & 16\\-1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}^{-1} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix}-4 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & -4\end{pmatrix}$$

Die Matrizenexponentialfunktion ist folglich

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{tA} &= \begin{pmatrix}-4 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{3t} & t\mathrm{e}^{3t}\\0 & \mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-t\mathrm{e}^{3t} & (1-4t)\mathrm{e}^{3t}\\-\mathrm{e}^{3t} & -4\mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}\\ &= \mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix}4t+1 & 16t\\-t & 1-4t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2 (Empfohlen für Hörer*innen von Prof. Dr. Schnaubelt)

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 2)

a) *Behauptung.* Die Menge M ist abgeschlossen und weder offen noch kompakt.

Beweis. Offenbar ist die Menge $[0,\infty)\times\{0\}$ in M enthalten, weshalb M nicht beschränkt ist. Folglich kann M auch nicht kompakt sein.

Weiter ist $(0,0)\in M$, aber es kann keine Umgebung U um $(0,0)$ existieren, welche in M enthalten ist, da $\mathbb{R}_{<0}\times\{0\}\cap M = \emptyset$. Die Menge M ist also nicht offen.

Seien $(x_n,y_n)\in M$, $n\in\mathbb{N}$ mit $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (x_0,y_0)$ für ein $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Dann folgt aus der Stetigkeit der Abbildungen $(x,y)\mapsto x$ und $(x,y)\mapsto \left|\sin(x^2)\right| - y$, dass auch $x_0\geq 0$, $\left|\sin(x_0^2)\right| - y_0 \geq 0$ gilt. Also liegt (x_0,y_0) in M und die Menge ist abgeschlossen. □

b) *Behauptung.* $\overline{N} = N\cup\partial B(0,1)$

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass N das Bild der stetigen Funktion $f\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}^2$; $f(t) = (1-\mathrm{e}^{-t})\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}$ ist.

Sei $(x,y)^\intercal = (\cos(\varphi),\sin(\varphi))^\intercal \in \partial B(0,1)$ für ein $\varphi\in[0,2\pi)$. Definiere $(x_n,y_n) = (1-\mathrm{e}^{-\varphi-2\pi n})(\cos(\varphi+2\pi n),\sin(\varphi+2\pi n))^\intercal = (1-\mathrm{e}^{-\varphi-2\pi n})(\cos(\varphi),\sin(\varphi))^\intercal \in N$ für $n\in\mathbb{N}$. Es gilt $\lim_{n\to\infty}|(\cos(\varphi),\sin(\varphi))^\intercal - (x_n,y_n)|_2 = \lim_{n\to\infty} e^{-\varphi-2\pi n} = 0$. Also konvergiert (x_n,y_n) gegen (x,y). Es folgt $N\cup\partial B(0,1)\subseteq\overline{N}$.

Wir zeigen nun $N\cup\partial B(0,1)\supseteq\overline{N}$. Aus der Vorlesung wissen wir

$$\overline{N} = \{x \mid \exists x_n\in N\colon x_n\to x, n\to\infty\}.$$

Sei also $x_n\in N$ so, dass $x_n\to x_0$ für ein $x_0\in\mathbb{R}^2$ und $n\to\infty$. Dies impliziert aber auch die Konvergenz $|x_n|_2\to|x_0|_2$, weshalb $|x_0|_2\leq 1$. Falls $|x_0|_2 = 1$, so gilt trivialerweise $x_0\in\partial B(0,1)$. Sei also $|x_0|_2 < 1$. Dann existiert ein Index $N\in\mathbb{N}$ mit $|x_n|_2 < 1-\mathrm{e}^{t_0}$ für ein $t_0>0$ und $n\geq N$. Somit liegen fast alle x_n im Bild $f([0,t_0])$. Da f stetig und $[0,t_0]$ kompakt ist, ist $f([0,t_0])$ wiederum abgeschlossen und somit gilt $x_0\in f([0,t_0])\subseteq N$. Daraus folgt wie behauptet $\overline{N}\subseteq N\cup\partial B(0,1)$.

Alternativ kann man auch zeigen, dass $N \cup \partial B(0,1)$ bereits abgeschlossen bzw. das Komplement offen ist, woraus ebenfalls $N \cup \partial B(0,1) \supseteq \overline{N}$ folgt. Sei $x \in (N \cup \partial B(0,1))^\complement$. Es ist entweder $|x|_2 > 1$ oder $0 < |x|_2 < 1$.

Sei zunächst $|x|_2 > 1$. Da $N \cup \partial B(0,1) \subseteq \overline{B}(0,1)$ ist, ist wiederum $B(x, 1-|x|_2) \subseteq (N \cup \partial B(0,1))^\complement$. Sei nun $x \in (N \cup \partial B(0,1))^\complement$ mit $0 < |x|_2 < 1$. Dann existiert ein $t_0 > 0$ mit $(1-e^{t_0}) > |x|_2$. Da $N \cap \overline{B}(0, 1-e^{t_0})$ das Bild der kompakten Menge $[0, t_0]$ unter der Funktion f ist, ist $N \cap \overline{B}(0, 1-e^{t_0})$ insbesondere abgeschlossen. Somit existiert eine Umgebung U um x so, dass U in $(N \cap \overline{B}(0, 1-e^{t_0}))^\complement$ enthalten ist. Da

$$(N \cup \partial B(0,1))^\complement = (N \cap \overline{B}(0, 1-e^{t_0}))^\complement \cap ((N \cup \partial B(0,1)) \cap \overline{B}(0, 1-e^{t_0})^\complement)^\complement$$

ist $U \cap B(0, 1-e^{t_0}) \subseteq (N \cup \partial B(0,1))^\complement$ offen mit $x \in U \cap B(0, 1-e^{t_0})$. Wir finden also für jedes $x \in (N \cup \partial B(0,1))^\complement$ eine Umgebung, welche wiederum in $(N \cup \partial B(0,1))^\complement$ enthalten ist. Das Komplement ist somit offen und es folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 2' (Empfohlen für Hörer*innen von Prof. Dr. Lamm)

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 2'). Behauptung. Es gilt $\min_{(x,y,z)\in\overline{B}(0,1)} f(x,y,z) = f(0, \frac{-6}{\sqrt{37}}, \frac{1}{\sqrt{37}}) = -\sqrt{37}$ und $\max_{(x,y,z)\in\overline{B}(0,1)} f(x,y,z) = f(0, \frac{6}{\sqrt{37}}, \frac{-1}{\sqrt{37}}) = \sqrt{37}$.
Beweis. Wir untersuchen die Funktion zunächst auf kritische Punkte. Es gilt

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

Somit hat die Funktion keine kritischen Punkte und muss, nach dem Satz vom Maximum, die Extrema auf dem Rand von $B(0,1)$ annehmen. Sei $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Die Ableitung der Funktion g hat auf $B(0,1)$ vollen Rang, da

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \partial B(0,1) .$$

Sei $(x_0, y_0, z_0)^\intercal \in \partial B(0,1)$ ein Extremum von f. Nach dem Satz von Lagrange existiert ein Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) + \lambda \nabla g(x_0,y_0,z_0) = 0 \iff \begin{pmatrix} (2+2\lambda)x_0 \\ 6 + 2\lambda y_0 \\ -1 + 2\lambda z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Aus Gleichung (1) folgt entweder $\lambda = -1$ oder $x_0 = 0$. Betrachten wir zunächst den Fall $\lambda = -1$. Dann folgt aus Gleichung (2) $y_0 = 3$, was eine Widerspruch zu $(x_0, y_0, z_0)^\intercal \in \partial B(0,1)$ darstellt. Also muss $x_0 = 0$ gelten. Aus Gleichung (3) folgt $z_0 \neq 0$ und durch Einsetzen in Gleichung (2) erhalten wir

$$6 + 2\lambda z_0 \frac{y_0}{z_0} = 0 \iff -6z_0 = y_0 .$$

Setzen wir dies wiederum in die Nebenbedingung ein, so gilt

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 36z_0^2 + z_0^2 = 1 \iff z_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{37}} .$$

Weiter ist

$$f(0, \frac{-6}{\sqrt{37}}, \frac{1}{\sqrt{37}}) = -\sqrt{37} < f(0, \frac{6}{\sqrt{37}}, \frac{-1}{\sqrt{37}}) = \sqrt{37}$$

und es gilt $\min_{(x,y,z)\in\overline{B}(0,1)} f(x,y,z) = f(0, \frac{-6}{\sqrt{37}}, \frac{1}{\sqrt{37}}) = -\sqrt{37}$ und $\max_{(x,y,z)\in\overline{B}(0,1)} f(x,y,z) = f(0, \frac{6}{\sqrt{37}}, \frac{-1}{\sqrt{37}}) = \sqrt{37}$. $\square$

Aufgabe 3

Lösungsvorschlag:

a) *Behauptung.* Die Funktion f ist stetig in $(0,0)$.

Beweis. Es gilt

$$0 \le |f(x,y)| = \frac{|y|x^2}{x^2+y^4} \le |y|\frac{x^2+y^4}{x^2+y^4} = |y| \to 0\,.$$

für $(x,y) \to 0$. Somit gilt $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ und die Funktion f ist stetig in $(0,0)$. □

b) *Behauptung.* Es gilt $\partial_v f(0,0) = \begin{cases} v_2, & v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{v_1 \neq 0\} \\ 0, & v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \text{ mit } v_1 = 0 \end{cases}.$

Beweis. Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Zunächst sei $v_1 \neq 0$, dann ist

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(f(0+tv) - f(0)) = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} = v_2$$

Sei nun $v_1 = 0$, so gilt

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(f(0+tv) - f(0)) = \lim_{t\to 0} 0 = 0\,.$$ □

c) *Behauptung.* Die Funktion f ist nicht differenzierbar in $(0,0)$.

Beweis. Falls f in $(0,0)$ differenzierbar ist, so ist nach Teil b) die Ableitung durch $Df(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x f(0,0) & \partial_y f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Es müsste also

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - Df(0,0)(x,y)^\intercal|}{|(x,y)|_1} = 0$$

gelten. Sei $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$, so gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|f(x_n,y_n) - f(0,0) - Df(0,0)(x_n,y_n)^\intercal|}{|(x_n,y_n)|_1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1/n^3}{1/n^4+1/n^4}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n/2}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2/2}{\frac{1}{n}+1} = \infty\end{aligned}$$

Folglich kann f nicht in $(0,0)$ differenzierbar sein. □

Aufgabe 4

Lösungsvorschlag:
Behauptung. Die Funktion f besitzt in $(6,18)$ ein lokales Minimum.

Beweis. Als multivariates Polynom ist die Funktion f glatt und der Gradient ist gegeben durch

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6y \\ 2y - 6x \end{pmatrix}.$$

Da $\mathbb{R}^2$ offen ist, sind die Extremalstellen der Funktion kritische Punkte. Wir bestimmen also zunächst die kritischen Punkte von f. Es gilt

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff x^2 = 2y \quad \wedge \quad 2y = 6x\,.$$

Wir erhalten die Lösungen $\{(0,0),(6,18)\}$. Die Hesse-Matrix von f ist

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $(6,18)$ ist $\det 6\cdot 6 > 0$ und $\det \begin{pmatrix} 6\cdot 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = 36 > 0$. Die Matrix ist nach Vorlesung also positiv definit und es liegt ein (zunächst lokales) Minimum vor.

Im Punkt $(0,0)$ liegt hingegen kein Extremum vor, da $f(x,0) = x^3$ und in jeder Umgebung U von $(0,0)$ Punkte $x^+, x^- \in \mathbb{R}$ existieren mit $f(x^-,0) < f(0,0) = 0 < f(x^+,0)$.

Weiter gilt $\lim_{n\to\infty} f(-n,0) = -\infty$. Das Minimum bei $(6,18)$ kann also nicht global sein. $\square$

Aufgabe 5

Lösungsvorschlag: Wir definieren die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$;

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{xz}y - 2yz - 1\,, \\ y^3 z + e^{z-1}(y^2+y) + 1 \end{pmatrix}.$$

So ist F offenbar stetig differenzierbar und es gilt $F(0,-1,1) = 0$. Die Jacobimatrix ist gegeben durch

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} ze^{xz}y & e^{xz} - 2z & xe^{xz}y - 2y \\ 0 & 3y^2z + e^{z-1}(2y+1) & y^3 + e^{z-1}(y^2+y) \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\partial_{(x,y)}F(0,-1,1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist offenbar invertierbar und die Inverse ist gegeben durch $\partial_{(x,y)}F(0,-1,1)^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen aus der Vorlesung existieren nun Umgebungen $U_z \subseteq \mathbb{R}$ von $z_0 = 1$ und $U_{x,y} \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(x_0,y_0) = (0,-1)$, sowie eine Funktion $\varphi \in C^1(U_z, U_{x,y})$ so, dass für $(x,y,z) \in U_{x,y} \times U_z$ die Funktion $F(x,y,z) = 0$ genau dann erfüllt, wenn $\varphi(z) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gilt. Die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ ist dabei äquivalent dazu, dass (x,y,z) das Gleichungssystem (1) löst. Es verbleibt die Ableitung zu berechnen. Nach Vorlesung gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(1) &= -\left[\partial_{(x,y)}F(\varphi(1),1)\right]^{-1} \partial_z F(\varphi(1),1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 6

Lösungsvorschlag: a) Es gilt $\partial_{x_2}F_1(x_1,x_2) = x_1 \neq 0 = \partial_{x_1}F_2(x_1,x_2)$. Die Funktion besitzt also kein Potential.

Für das Kurvenintegral erhält man

$$\begin{aligned} \int_\gamma F \cdot dx &= \int_0^{\pi/2} \left(F(\gamma(t)) \mid \gamma'(t)\right)\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\begin{pmatrix} \cos(t)\sin(t) \\ \sqrt{\sin(t)} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \cos(t)\sin(t)^2\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

b) Betrachtet man die erste Komponente von F, so muss ein Potential Φ von der Form $\Phi(x_1,x_2,x_3) = \int 2x_1x_2 + 2\,\mathrm{d}x_1 + \varphi_1(x_2,x_3) = x_1^2x_2 + 2x_1 + \varphi_1(x_2,x_3)$ für eine von x_1 unabhängige Funktion φ_1 sein. Betrachtet man analog die zweite und dritte Komponente, so muss Φ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\Phi(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2x_2 + 4\mathrm{e}^{x_2x_3} + \varphi_2(x_1,x_3) \\
\Phi(x_1,x_2,x_3) &= 4\mathrm{e}^{x_2x_3} + \varphi_3(x_1,x_2)
\end{aligned}$$

für entsprechende Funktionen φ_2, φ_3 erfüllen. Vergleicht man die drei Ansatzfunktionen für Φ so liegt es nahe $\Phi(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2 + 2x_1 + 4\mathrm{e}^{x_2x_3}$ zu wählen. Tatsächlich gilt $\nabla\Phi(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2+2 \\ x_1^2 + 4x_3\mathrm{e}^{x_2x_3} \\ 4x_2\mathrm{e}^{x_2x_3} \end{pmatrix} = F(x_1,x_2,x_3)$ und jenes Φ ist somit ein Potential von F.

Alternativ kann man Φ auch über das Kurvenintegral $\int_{\gamma_x} F\cdot\mathrm{d}x$, mit $\gamma_x\colon [0,1], t\mapsto tx$ für $x = (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, bestimmen. In diesem Falle erhält man

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_x} F\cdot\mathrm{d}x &= \int_0^1 \big(F(\gamma_x(t)) \mid \gamma_x'(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\begin{pmatrix} 2t^2x_1x_2+2 \\ t^2x_1^2 + 4tx_3\mathrm{e}^{t^2x_2x_3} \\ 4tx_2\mathrm{e}^{t^2x_2x_3} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 2t^2x_1^2x_2 + 2x_1 + t^2x_1^2x_2 + 4tx_2x_3\mathrm{e}^{t^2x_2x_3} + 4tx_2x_3\mathrm{e}^{t^2x_2x_3}\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[tx_1^3x_2 + 2tx_1 + 2\mathrm{e}^{t^2x_2x_3} + 2\mathrm{e}^{t^2x_2x_3}\Big]_{t=0}^{t=1} \\
&= x_1^2x_2 + 2x_1 + 4\mathrm{e}^{x_2x_3} =: \Phi(x_1,x_2,x_3)\,.
\end{aligned}$$

Durch bilden des Gradienten von Φ sieht man nun wiederum ein, dass es sich um ein Potential von F handelt. (Natürlich ist es auch legitim das Φ zu raten und einfach nur abzuleiten um zu zeigen, dass es sich um ein Potential von F handelt.)

Für das Kurvenintegral erhält man nach Vorlesung

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F\cdot\mathrm{d}x &= \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)) = \Phi(2,1,1) - \Phi(1,0,0) \\
&= 4 + 4 + 4\mathrm{e} - 2 - 4 = 2 + 4\mathrm{e}\,.
\end{aligned}$$

Alternativ kann man das Kurvenintegral auch direkt berechnen

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F\cdot\mathrm{d}x &= \int_0^1 \big(F(\gamma(t)) \mid \gamma'(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\begin{pmatrix} 2(t+1)t^2+2 \\ (t+1)^2 + 4t^2\mathrm{e}^{t^4} \\ 4t^2\mathrm{e}^{t^4} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2t \end{pmatrix} \right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 2t^3 + 2t^2 + 2 + 2t^3 + 4t^2 + 2t + 8t^3\mathrm{e}^{t^4} + 8t^3\mathrm{e}^{t^4}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 4t^3 + 6t^2 + 2t + 2 + 16t^3 \mathrm{e}^{t^4} \,\mathrm{d}t$$
$$= \Big[t^4 + 2t^3 + t^2 + 2t + 4\mathrm{e}^{t^4}\Big]_{t=0}^{t=1} = 2 + 4\mathrm{e}\,.$$

$\square$

Aufgabe 7

Lösungsvorschlag: Definiere $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ f(u,v,w) = \begin{pmatrix} -u^3 + vw \\ u^3 - vw \\ -vw \end{pmatrix}$. Die Funktion f ist stetig differenzierbar und somit lokal Lipschitz stetig. Somit existiert nach dem Satz von Picard-Lindelöf ein maximales Existenzintervall $[0, \bar{t}) \subseteq \mathbb{R}$ und genau eine Lösung $(u,v,w)\colon [0,\bar{t}) \to \mathbb{R}^3$ der Differentialgleichung. Es gelten $f_1(0,y,z) \geq 0$, $f_2(x,0,z) \geq 0$ und $f_3(x,y,0) \geq 0$ für alle $x,y,z \geq 0$ und $u_0, v_0, w_0 \geq 0$, d.h., die Funktion f erfüllt das Positivitätskriterium aus der Vorlesung und es folgt $u(t) \geq 0$, $v(t) \geq 0$ sowie $w(t) \geq 0$ für alle $t \in [0,\bar{t})$. Es gilt folglich $u'(t) + v'(t) + w'(t) = -v(t)w(t) \leq 0$ für alle $t \in [0,\bar{t})$, also ist $u(t) + v(t) + w(t)$ monoton fallend. Dies impliziert

$$0 \leq |(u(t), v(t), w(t))|_1 \leq u_0 + v_0 + w_0\,.$$

Die Blow-Up Bedingung kann also nicht erfüllt sein und der Satz von Picard-Lindelöf liefert somit $\bar{t} = \infty$. $\square$