SS 2022 06.09.2022

Frey
Analysis II

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: XX P.

Mathematik Fachschaft Informatik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie jeweils den Wert der folgenden Integrale.

$$\text{(i)} \quad \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^{\sqrt{\log(3)}} \frac{2x}{1+\mathrm{e}^{-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Untersuchen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral existiert.

$$\int_0^\infty \frac{e^{2x-x^2}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 2

(a) Es sei $M \subseteq (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, wobei $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 \leq 1, |y| \leq 1\}$. Untersuchen Sie M auf

(i) Abgeschlossenheit, (ii) Kompaktheit, (iii) Offenheit.

*Hinweis für die Hörer*innen von Prof. Dr. Schnaubelt*: Mit $\|\cdot\|_2$ ist die euklidische 2-Norm gemeint, die Prof. Dr. Schnaubelt mit $|\cdot|_2$ bezeichnet hat.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Ferner existiere $x \in \mathbb{R}$ und eine kompakte Menge $Y \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$\{x\} \times Y \subseteq U.$$

Zeigen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times Y \subseteq U$.

Aufgabe 3

(a) Wir betrachten $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $D_v f(0,0)$ für jedes $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

(ii) Untersuchen Sie f auf Differenzierbarkeit im Punkt $(0,0)$.

(b) Es seien $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in 0 differenzierbar mit $h(0) = h'(0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = g(x)h(y)$ in $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Stellen lokaler Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 - \tfrac{2}{3}x^3 + y^4\,\mathrm{e}^{-4y}$$

und geben Sie jeweils an, ob es sich um die Stelle eines lokalen Minimums oder Maximums handelt.

Aufgabe 5

Für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^3y - \sin(xz^2) &= 0, \\ x + \mathrm{e}^{xy} - xz &= 2 \end{aligned} \tag{2}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}$ von $x = 1$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g = (g_1, g_2)\colon U \to \mathbb{R}^2$ mit $g(1) = (0,0)$ so gibt, dass $(x, g_1(x), g_2(x))$ das Gleichungssystem (2) für alle $x \in U$ löst. Bestimmen Sie außerdem $g'(1)$.

Aufgabe 6

(a) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}\sin(t) \\ \mathrm{e}^{-t}\cos(t) \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie für $s \geq 1$ das Kurvenintegral $\int_{\gamma_s} F \cdot \mathrm{d}x$, wobei

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \qquad \gamma_s\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_s(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^s \end{pmatrix}.$$

Folgern Sie, dass F kein Potential besitzt.

Aufgabe 7

(a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems auf dem maximalen Existenzintervall $[0, t_+)$. Geben Sie auch t_+ explizit an.

$$\begin{cases} u'(t) = \cos(t)\mathrm{e}^{u(t)}, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

(b) Begründen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\,v_1(t) + v_2^2(t) \\ -v_1(t)v_2(t) - v_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige maximale Lösung $v = (v_1, v_2) \in C^1([0, t_+), \mathbb{R}^2)$ besitzt. Zeigen Sie ferner, dass $\|v(t)\|_2 \leq 1$ für alle $t \in [0, t_+)$ gilt.

*Hinweis für die Hörer*innen von Prof. Dr. Schnaubelt*: Mit $\|\cdot\|_2$ ist die euklidische 2-Norm gemeint, die Prof. Dr. Schnaubelt mit $|\cdot|_2$ bezeichnet hat.

Aufgabe 1

(a) *Behauptung*: Es gelten

$$\text{(i)} \quad \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{15}, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^{\sqrt{\log(3)}} \frac{2x}{1+\mathrm{e}^{-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\log(2).$$

Beweis. (i) Mit der Substitution $u = 1-x$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ erhalten wir

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (-(1-x)+1)\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 -(1-x)^{\frac{3}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 -u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \left[-\tfrac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4}{15}.$$

Alternative Lösung: Mit der Substitution $u = 1-x$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ erhalten wir zunächst, dass $\int (1-x)^\alpha\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+\alpha}(1-x)^{1+\alpha}$ für jedes $\alpha > 0$ gilt. Daher erhalten wir mit partieller Integration

$$\int_0^1 \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 -\tfrac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = -\left[\tfrac{2}{3}\tfrac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{15}.$$

(ii) Mit den Substitutionen $u = x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ und $v = 1+\mathrm{e}^u$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$ erhalten wir

$$\int_0^{\sqrt{\log(3)}} \frac{2x}{1+\mathrm{e}^{-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\log(3)} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\log(3)} \frac{\mathrm{e}^u}{1+\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}u = \int_2^4 \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = [\log(v)]_2^4 = \log(2).$$

□

(b) *Behauptung*: Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{2x-x^2}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ existiert.

Beweis. Wir zeigen, dass die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{e}^{2x-x^2}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_3^\infty \frac{\mathrm{e}^{2x-x^2}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

existieren. Hieraus folgt dann, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{2x-x^2}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \frac{\mathrm{e}^{2x-x^2}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \int_3^\infty \frac{\mathrm{e}^{2x-x^2}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

existiert.

- Für $x \in (0,3]$ ist $2x - x^2 = 1 - (1-2x+x^2) = 1-(x-1)^2 \leq 1$ und daher

$$\frac{\mathrm{e}^{2x-x^2}}{\sqrt{x}} \leq \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{x}} \quad \text{für alle } x \in (0,3].$$

  Da nach Vorlesung das uneigentliche Integral $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ existiert, folgt die Existenz von $\int_0^3 \frac{\mathrm{e}^{2x-x^2}}{\sqrt{x}}$ aus dem Majorantenkriterium.
- Für $x \in [3,\infty)$ ist $2x - x^2 = (2-x)x \leq (2-3)x = -x$ und daher

$$\frac{\mathrm{e}^{2x-x^2}}{\sqrt{x}} \leq \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \leq \mathrm{e}^{-x} \quad \text{für alle } x \in [3,\infty).$$

Da nach Vorlesung das uneigentliche Integral $\int_3^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ existiert, folgt die Existenz von $\int_3^\infty \frac{\mathrm{e}^{2x-x^2}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ aus dem Majorantenkriterium.

□

Aufgabe 2

(a) (i) *Behauptung*: Die Menge M ist abgeschlossen in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

Beweis. Wir definieren

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 - y^2.$$

Dann ist f als Polynomfunktion stetig und wir bemerken anhand der Definition von M, dass

$$M = f^{-1}((-\infty,1]) \cap (\mathbb{R} \times [-1,1])$$

gilt. Da f stetig ist, sind Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen und damit $f^{-1}((-\infty,1])$ abgeschlossen in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Die Menge $\mathbb{R} \times [-1,1]$ ist nach Vorlesung abgeschlossen in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Also ist M als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. □

Alternativer Beweis: Sei $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ konvergent mit Grenzwert $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Da $(x_n, y_n) \subseteq M$ gilt, haben wir

$$x_n^2 - y_n^2 \leq 1 \quad \text{und} \quad |y_n| \leq 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Konvergenz von $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen (x,y) impliziert $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für $n \to \infty$, sodass wir aus obigen Ungleichungen auch

$$x^2 - y^2 \leq 1 \quad \text{ und } |y| \leq 1$$

erhalten. Damit gilt aber auch $(x,y) \in M$. Somit ist M abgeschlossen in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

(ii) *Behauptung*: Die Menge M ist kompakt.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass M beschränkt ist: Genauer zeigen wir $M \subseteq \overline{B}(0, \sqrt{3})$. Sei hierfür $(x,y) \in M$. Nach Voraussetzung gilt dann schon einmal $|y| \leq 1$ und $x^2 - y^2 \leq 1$. Aus diesen Ungleichungen folgt $x^2 \leq 1 + y^2 \leq 1 + 1 = 2$. Wir folgern $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$, d.h., $(x,y) \in \overline{B}(0,\sqrt{3})$.

Damit ist M beschränkt und nach Aufgabenteil (i) abgeschlossen. Nach dem Satz von Heine-Borel ist damit M als beschränkte und abgeschlossene Menge auch kompakt. □

(iii) *Behauptung*: Die Menge M ist nicht offen.

Beweis. Durch Einsetzen sehen wir, dass z.B. der Punkt $(0,1)$ in M liegt, allerdings haben wir $(0, 1+r) \notin M$ für jedes $r > 0$, da $|1+r| = 1 + r > 1$ für $r > 0$ gilt. Somit kann kein $r > 0$ existieren mit $B((0,1), r) \subseteq M$. Also ist M nicht offen. □

(b) *Behauptung*: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Ferner existiere $x \in \mathbb{R}$ und eine kompakte Menge $Y \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$\{x\} \times Y \subseteq U.$$

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times Y \subseteq U$.

Beweis. Sei $y \in Y$. Dann ist nach Voraussetzung $(x,y) \in x \times Y \subseteq U$, und da U offen ist, existiert ein $r_y > 0$ mit $U_y := (x - r_y, x + r_y) \times (y - r_y, y + r_y) \subseteq U$ (hierbei haben wir die Äquivalenz der Normen auf $\mathbb{R}^2$ ausgenutzt; es gilt nämlich $U_y = B_{\|\cdot\|_\infty}((x,y), r_y)$). Das Mengensystem $\mathcal{U} := \{U_y : y \in Y\}$ bildet dann eine offene Überdeckung von $\{x\} \times Y$. Da mit Y auch $\{x\} \times Y$ kompakt ist (vgl. Übungen), folgt, dass eine endliche Teilüberdeckung von $\{x\} \times Y$ existiert, d.h., es existieren $n \in \mathbb{N}$ und $y_1, y_2, \dots y_n \in Y$ mit $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{y_k}$. Wir setzen nun $\varepsilon := \min_{1 \le k \le n} r_{y_k} > 0$. Dann erhalten wir wie gewünscht

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times Y \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y_k - r_{y_k}, y_k + r_{y_k}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{y_k} \subseteq U.$$

$\square$

Alternativer Lösungsvorschlag 1: Wir beweisen die Behauptung per Widerspruch: Angenommen, es existierte kein $\varepsilon > 0$ mit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times Y \subseteq U$. Dann gäbe es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $(x_n, y_n) \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \times Y$ mit $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \backslash U =: A$, wobei A als Komplement der offenen Menge U abgeschlossen ist. Da Y nach Voraussetzung kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(y_{n_k})_k$ von $(y_n)_n$ mit Grenzwert $y \in Y$. Da ferner nach Definition $|x - x_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, ist auch $(x_{n_k})_k$ konvergent mit Grenzwert x. Also konvergiert $(x_{n_k}, y_{n_k})_k$ gegen (x,y) für $k \to \infty$. Da die Folge $(x_{n_k}, y_{n_k})_k$ nach Defintion in A liegt und A abgeschlossen ist, folgern wir $(x,y) \in A$, im Widerspruch zu $(x,y) \in \{x\} \times Y \subseteq U = \mathbb{R}^2 \backslash A$.

Alternativer Lösungsvorschlag 2: Da $Y \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, ist $K := \{x\} \times Y$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ (vgl. Übungen). Ferner ist $A := \mathbb{R}^2 \backslash U$ abgeschlossen, da $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nach Voraussetzung offen ist. Nach den Übungen ist daher der Abstand zwischen K und A strikt positiv, d.h., es gilt

$$\varepsilon := \mathrm{d}(K, A) = \inf_{k \in K, a \in A} \|k - a\|_2 > 0.$$

Dies impliziert $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times Y \subseteq U$, denn für festes (aber beliebig gewähltes) $(x', y) \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times Y$ und beliebiges $a \in A$ gilt

$$\|a - (x', y)\|_2 \geq \|a - (x,y)\|_2 - \|(x,y) - (x',y)\|_2 \geq \varepsilon - |x - x'| > 0.$$

Also gilt $(x', y) \neq a$ für alle $a \in A$, mit anderen Worten: $(x', y) \in \mathbb{R}^2 \backslash A = U$. Da $(x', y) \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times Y$ beliebig gewählt war, folgt $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times Y \subseteq U$.

Aufgabe 3

(a) (i) *Behauptung*: Es gilt

$$D_v f(0,0) = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2+v_2^2} \quad \text{für alle } v=(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

Beweis. Sei $v=(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Für $t \to 0$ haben wir dann

$$\frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = \frac{tv_1 \sin(t^2 v_1 v_2)}{t^3(v_1^2+v_2^2)} = \frac{v_1}{(v_1^2+v_2^2)} \frac{\sin(t^2 v_1 v_2)}{t^2} \to \frac{v_1}{v_1^2+v_2^2} v_1 v_2 = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2+v_2^2},$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(at)}{t} = a$ für $a \in \mathbb{R}$ gilt (was wiederum z.B. aus der Regel von de L'Hospital folgt). Es folgt

$$D_v f(0,0) = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2+v_2^2} \quad \text{für alle } v=(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

□

(ii) *Behauptung*: Die Funktion f ist im Punkt $(0,0)$ nicht differenzierbar.

Beweis. Angenommen, es wäre f differenzierbar im Punkt $(0,0)$. Dann wäre $v \mapsto D_v f(0,0)$ linear: Genauer gälte dann

$$D_v f(0,0) = f'(0,0)v \quad \text{für alle } v=(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}. \tag{1}$$

Aus Aufgabenteil (i) lesen wir $\partial_1 f(0,0) = D_{e_1} f(0,0) = 0$ und $\partial_2 f(0,0) = D_{e_2} f(0,0) = 0$ ab. Damit wäre

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(0,0) & \partial_2 f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}.$$

und somit nach Aufgabenteil (i) und (1)

$$\frac{v_1^2 v_2}{v_1^2+v_2^2} = D_v f(0,0) = f'(0,0)v = 0 \quad \text{für alle } v=(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

Dies ist offensichtlich ein Widerspruch (man setze z.B. $v=(1,1)$). □

Alternativer Lösungsvorschlag: Angenommen, es wäre f differenzierbar im Punkt $(0,0)$. Da nach Aufgabenteil (i) die Beziehungen $\partial_1 f(0,0) = D_{e_1} f(0,0) = 0$ und $\partial_2 f(0,0) = D_{e_2} f(0,0) = 0$ gelten, folgern wir

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(0,0) & \partial_2 f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}.$$

Wir setzen nun $(x_n,y_n) \coloneqq (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$. Für $n \to \infty$ gilt dann $(x_n,y_n) \to (0,0)$, aber

$$\frac{|f(x_n,y_n) - f(0,0) - f'(0,0)(x_n,y_n)|}{\|(x_n,y_n)\|_2} = \frac{|f(x_n,y_n)|}{\|(x_n,y_n)\|_2} = \frac{\frac{n^2 |\sin(\frac{1}{n^2})|}{2n}}{\sqrt{2}\frac{1}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \to \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0,$$

im Widerspruch zur Definition der Differenzierbarkeit.

(b) *Behauptung*: Es seien $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in 0 differenzierbar mit $h(0) = h'(0) = 0$. Dann ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = g(x)h(y)$ in $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Beweis. Zunächst einmal bestimmen wir die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$: Da nach Voraussetzung $h(0) = 0$ ist, gilt $f(x,0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0.$$

Genauso erhalten wir wegen $h'(0) = 0$, dass

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} g(0)\frac{h(y) - h(0)}{y} = g(0)h'(0) = 0.$$

Also ist

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} \partial_x f(0,0) & \partial_y f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

unser Kandidat für die Ableitung von f in $(0,0)$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ betrachten wir nun

$$Q(x,y) \coloneqq \frac{|f(x,y) - f(0,0) - A(x,y)|}{\|(x,y)\|_2} = \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|_2} = \frac{|g(x)h(y)|}{\|(x,y)\|_2}.$$

Ist $y = 0$, so ist wegen $h(0) = 0$ auch $Q(x,y) = 0$. Für $y \neq 0$ folgt aus der Beschränktheit von g (d.h., $\|g\|_\infty < \infty$) und $h(0) = 0$, dass

$$Q(x,y) = |g(x)| \frac{|y|}{\|(x,y)\|_2} \frac{|h(y)|}{|y|} \le \|g\|_\infty \frac{|h(y) - h(0)|}{|y|}.$$

Hieraus folgern wir

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} Q(x,y) \le \lim_{y\to 0} \|g\|_\infty \frac{|h(y) - h(0)|}{|y|} \le \|g\|_\infty |h'(0)| = 0,$$

d.h., $\lim_{(x,y)\to(0,0)} Q(x,y) = 0$. Also ist f in $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar mit Ableitung $f'(0,0) = (0\ \ 0)$. □

Aufgabe 4

Behauptung: Die Funktion f hat nur in den Stellen $(0,0)$ und $(1,1)$ lokale Extrema. Der Punkt $(0,0)$ ist hierbei die Stelle eines lokalen Minimums und der Punkt $(1,1)$ die Stelle eines lokalen Maximums.

Beweis. Wir bestimmen zunächst die kritischen Stellen von f:

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= 2x - 2x^2 = 2x(1-x) \overset{!}{=} 0 \quad \text{und} \\ \partial_y f(x,y) &= (4y^3 - 4y^4)\mathrm{e}^{-4y} = 4y^3(1-y)\mathrm{e}^{-4y} \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Dies ergibt $x \in \{0,1\}$ und $y \in \{0,1\}$. Da $(1,0)$ nicht im Definitionsbereich von f liegt, erhalten wir $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,1)$ als kritische Stellen von f.

Zur Klassifizierung der kritischen Stellen berechnen wir die Hessematrix von f. Es gilt

$$\partial_{xx} f(x,y) = 2 - 4x, \quad \partial_{xy} f(x,y) = 0, \quad \partial_{yy} f(x,y) = 4y^2\mathrm{e}^{-4y}(4y^2 - 8y + 3)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$, womit wir

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 4x & 0 \\ 0 & 4y^2 \mathrm{e}^{-4y}(4y^2 - 8y + 3) \end{pmatrix}$$

erhalten. Wir folgern

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4\mathrm{e}^{-4} \end{pmatrix}, \quad H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4\mathrm{e}^{-4} \end{pmatrix}, \quad H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

An den Vorzeichen der Eigenwerte lesen wir sofort ab, dass $H_f(1, 1)$ negativ definit, $H_f(0, 1)$ indefinit und $H_f(0, 0)$ positiv semidefinit ist. Somit liegt in $(1, 1)$ ein lokales Maximum und in $(0, 1)$ ein Sattelpunkt, also kein Extremum vor. Die Stelle $(0, 0)$ bedarf gesonderter Betrachtung, da sich aus der Semidefnitheit der Hessematrix im Allgemeinen keine Aussage über das Vorliegen eines Extremums folgern lässt. Für $|x| \leq 1$ und $y \in \mathbb{R}$ haben wir

$$f(x, y) = (1 - \frac{2}{3}x)x^2 + y^4 \mathrm{e}^{-4y} \geq \frac{1}{3}x^2 + y^4 \mathrm{e}^{-4y} \geq 0 \quad \text{und} \quad f(0, 0) = 0.$$

Also ist $(0, 0)$ die Stelle eines lokalen Minimums. □

Aufgabe 5

Wir definieren die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^3 y - \sin(xz^2) \\ x + \mathrm{e}^{xy} - xz - 2 \end{pmatrix}.$$

Für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt dann

$$(x, y, z) \text{ löst } (2) \iff f(x, y, z) = 0.$$

Durch Einsetzen sehen wir, dass $(1, 0, 0)$ das Gleichungssystem (2) löst, also $f(1, 0, 0) = 0$ ist. Als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen ist f selbst stetig differenzierbar und es gilt

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 y - z^2 \cos(xz^2) & x^3 & -2xz \cos(xz^2) \\ 1 + y\mathrm{e}^{xy} - z & x\mathrm{e}^{xy} & -x \end{pmatrix}$$

also

$$\partial_x f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 y - z^2 \cos(xz^2) \\ 1 + y\mathrm{e}^{xy} - z \end{pmatrix}, \quad \partial_{(y,z)} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^3 & -2xz \cos(xz^2) \\ x\mathrm{e}^{xy} & -x \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Wegen

$$\det \partial_{(y,z)} f(1, 0, 0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1 \neq 0$$

ist $\partial_{(y,z)} f(1, 0, 0)$ invertierbar. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existiert daher eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}$ von $x = 1$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g = (g_1, g_2) \colon U \to \mathbb{R}^2$ so, dass $f(x, g_1(x), g_2(x)) = 0$ für alle $x \in U$ gilt. Damit löst aber auch $(x, g_1(x), g_2(x))$ das Gleichungssystem (2). Ferner gilt

$$g'(1) = -\left(\partial_{(y,z)} f(1, 0, 0)\right)^{-1} \partial_x f(1, 0, 0) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6

(a) *Behauptung*: Die Bogenlänge von γ ist gegeben durch $L(\gamma) = \sqrt{2}(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})$.

Beweis. Für $t \in [0, 2\pi]$ haben wir

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t}\sin(t) + \mathrm{e}^{-t}\cos(t) \\ -\mathrm{e}^{-t}\cos(t) - \mathrm{e}^{-t}\sin(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} (\cos(t) - \sin(t)) \\ -(\cos(t) + \sin(t)) \end{pmatrix}$$

und daher

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|_2 &= \mathrm{e}^{-t}\left[(\cos(t) - \sin(t))^2 + (\cos(t) + \sin(t))^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \mathrm{e}^{-t}\left[\cos^2(t) - 2\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t) + 2\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \mathrm{e}^{-t}\left[2(\cos^2(t) + \sin^2(t))\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Bogenlänge

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}[-\mathrm{e}^{-t}]_0^{2\pi} = \sqrt{2}(1 - \mathrm{e}^{-2\pi}).$$

□

(b) *Behauptung*: Es gilt

$$\int_{\gamma_s} F \cdot \mathrm{d}x = \frac{1-s}{1+s} \quad \text{für alle } s \geq 1.$$

Beweis. Sei $s \geq 1$. Wir berechnen

$$\int_{\gamma_s} F \cdot \mathrm{d}x = \int_0^1 \langle F(\gamma_s(t)), \gamma_s'(t)\rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^s \\ -t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ st^{s-1} \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-s)t^s \,\mathrm{d}t = \frac{1-s}{1+s}.$$

□

Nun bemerken wir, dass die Kurven γ_s alle denselben Start- und Endpunkt besitzen, denn es gilt $\gamma_s(0) = (0,0)$, $\gamma_s(1) = (1,1)$ für alle $s \geq 1$. Daher zeigt obige Behauptung, dass F nicht wegunabhängig ist und folglich kein Potential besitzen kann.

Aufgabe 7

(a) Wir setzen $h(t) = \cos(t)$, $t \in \mathbb{R}$, und $g(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$. Wegen $g(0) = 1 \neq 0$ können wir Trennung der Variablen anwenden und wir erhalten

$$1 - \mathrm{e}^{-u(t)} = \int_0^{u(t)} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{u(t)} \frac{1}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \cos(s)\,\mathrm{d}s = \sin(t).$$

Umstellen nach $u(t)$ liefert

$$u(t) = -\log(1 - \sin(t)).$$

Das maximale Existenzintervall $[0, t_+)$ ergibt sich aus der Bedingung, dass das Argument des Logarithmus positiv sein muss. Es ist

$$t_+ = \sup\{t^* \geq 0 \mid 1 - \sin(t) > 0 \quad \text{für alle } t \in [0, t^*)\} = \frac{\pi}{2}.$$

Also ist

$$u\colon [0, \pi/2) \to \mathbb{R}, \quad u(t) = -\log(1 - \sin(t))$$

die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Wir definieren

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} -x + y^2 \\ -xy - y \end{pmatrix}.$$

Dann hat das gegebene Anfangswertproblem die Form

$$v'(t) = f(v(t)), \quad v(0) = (0, 1).$$

Als stetig differenzierbare Funktion ist f lokal Lipschitzstetig bzgl. (x, y). Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert daher eine eindeutige maximale Lösung $v \in C^1([0, t_+), \mathbb{R}^2)$ des obigen Anfangswertproblems. Wir betrachten nun die Funktion $\varphi(t) := \|v(t)\|_2^2$ für $t \in [0, t_+)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= 2\langle v(t), v'(t)\rangle = 2\langle v(t), f(v(t))\rangle = 2 \left\langle \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -v_1(t) + v_2(t)^2 \\ -v_1(t)v_2(t) - v_2(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 2(-v_1(t)^2 + v_1(t)2v_2^2(t) - v_1(t)v_2^2(t) - v_2(t)^2) = -\|v(t)\|_2^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Also ist φ monoton fallend, d.h.,

$$\|v(t)\|_2^2 = \varphi(t) \leq \varphi(0) = \|v(0)\|_2^2 = \|(0, 1)\|_2^2 = 1 \quad \text{für alle } t \in [0, t_+).$$