Reichel
Analysis 2

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: ? P.
Bemerkungen: keine

Aufgabe 1:
Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{\sinh(x)-x}dx,$

b) $\displaystyle\int_2^\infty f(x)dx \quad \text{mit } f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ für $x \in [2^n, 2^{n+1})$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis für die Hörerinnen und Hörer von Prof. Frey: Es gilt $\ln(x) = \log(x)$ (Logarithmus zur Basis e).

Aufgabe 2:
Sei $a > 0$. Untersuchen Sie die Menge

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 \leq 2ay,\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}$$

auf Offenheit, Abgeschlossenheit, Beschränktheit und Kompaktheit.

Aufgabe 3:
Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y)$ mit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und

$$f(0,y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) \neq 0 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

Weiter sei $y_0 \in \mathbb{R}$ und $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit

$$(x_n, y_n) \to (0, y_0) \quad (n \to \infty) \quad \text{und} \quad f(x_n, y_n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n = 0$ für alle $n \geq N$.

Aufgabe 4:

a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|f(x)| \leq \|x\|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass f in $x = 0$ vollständig differenzierbar ist und bestimmen Sie $Df(0)$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{4x^4y^2}{(x^4+y^2)^2}(\cos(xy)-1), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ vollständig differenzierbar ist und bestimmen Sie $Df(0,0)$.

Hinweis für die Hörerinnen und Hörer von Prof. Frey: Der Begriff der „vollständigen Differenzierbarkeit“ entspricht dem Begriff der „Differenzierbarkeit“ aus der Vorlesung

Aufgabe 5:
Gegeben sei der Punkt $p := (1, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$ und die Menge

$$R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

Berechnen Sie

$$\inf\{\|v - p\|^2 : \; v \in R\}.$$

Hinweis für die Hörerinnen und Hörer von Prof. Frey: Es gilt $\|v\| = \|v\|_2$ (euklidische Norm).

Aufgabe 6:
Bestimmen Sie alle reellwertigen Lösungen $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ der Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} y$$

mit der Eigenschaft $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$.

Aufgabe 7:
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) := (\cosh(x) \sinh(x) + 2xy^2 + 4x^3, 4y^3 + 2x^2 y)$$

eine Stammfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ besitzt. Zeigen Sie weiter, dass für eine beliebige Stammfunktion F von f auf $\mathbb{R}^2$ und für $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$$N_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; F(x, y) = c\}$$

entweder leer oder beschränkt ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

a) *Behauptung:* Das Integral konvergiert absolut.

Beweis. Zunächst folgt aus der Reihendarstellung von sinh die Abschätzung

$$\sinh(x) - x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - x > x + \frac{x^3}{3!} - x = \frac{x^3}{6}, \quad \forall x \geq 1.$$

Weiter existieren nach Analysis 1, Korollar 7.10 Konstanten $M, C > 1$ mit $0 < \ln(x) \leq Cx$ für $x \geq M$. Damit erhalten wir für $t > M$:

$$\begin{aligned}
\int_1^t \left|\frac{\ln(x)}{\sinh(x) - x}\right| dx &= \int_1^M \left|\frac{\ln(x)}{\sinh(x) - x}\right| dx + \int_M^t \left|\frac{\ln(x)}{\sinh(x) - x}\right| dx \\
&\leq \int_1^M \left|\frac{\ln(x)}{\sinh(x) - x}\right| dx + C \int_M^t \frac{6}{x^2} dx \\
&= \int_1^M \left|\frac{\ln(x)}{\sinh(x) - x}\right| dx + 6C\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{t}\right) \\
&\leq \underbrace{\int_1^M \left|\frac{\ln(x)}{\sinh(x) - x}\right| dx}_{<\infty} + \frac{6C}{M} < \infty
\end{aligned}$$

und nach Lemma 1.33 (Majorantenkriterium) konvergiert das Integral $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{\sinh(x)-x} dx$ absolut.

Behauptung: Das Integral ist divergent.

Beweis. Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_2^{2^N} f(x)dx &= \sum_{k=1}^{N-1} \int_{2^k}^{2^{k+1}} f(x)dx \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^k} dx \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2^{k+1} - 2^k}{2^k}
\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

Behauptung: A ist kompakt (also beschränkt und abgeschlossen) und nicht offen.

Beweis. Zunächst ist klar, dass $A \neq \emptyset$, da z.B. $(0,0,0) \in A$. Sei nun $((x_n, y_n, z_n))_n$ eine konvergente Folge in A. Dann gilt

$$x_n^2 + y_n^2 \leq 2ay_n, \quad 0 \leq z_n \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und die Ungleichungen bleiben im Grenzwert erhalten, da $x \mapsto x^2$ und $[0, \infty) \ni x \mapsto \sqrt{x}$ stetig sind. Daher ist A abgeschlossen. Sei nun $(x, y, z) \in A$. Dann gilt

$$y^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2ay \implies y^2 - 2ay \leq 0 \iff y \in [0, 2a].$$

Daraus folgt $x^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2ay \leq 4a^2$ und damit $|x| \leq 2a$. Ferner gilt

$$0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{4a^2 + 4a^2}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 4a \quad \forall (x, y, z) \in A.$$

Damit ist A beschränkt und nach Satz 3.12 auch kompakt. Da $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}^3$ kann A nach Übung nicht offen sein. Insgesamt folgt die Behauptung.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Behauptung: A ist kompakt (also beschränkt und abgeschlossen) und nicht offen.

Beweis. Zunächst ist klar, dass $A \neq \emptyset$, da z.B. $(0,0,0) \in A$. Sei nun $((x_n, y_n, z_n))_n$ eine konvergente Folge in A. Dann gilt

$$x_n^2 + y_n^2 \leq 2ay_n, \quad 0 \leq z_n \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und die Ungleichungen bleiben im Grenzwert erhalten, da $x \mapsto x^2$ und $[0,\infty) \ni x \mapsto \sqrt{x}$ stetig sind. Daher ist A abgeschlossen. Sei nun $(x,y,z) \in A$. Dann gilt

$$y^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2ay \quad \Longrightarrow \quad y^2 - 2ay \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \in [0, 2a].$$

Daraus folgt $x^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2ay \leq 4a^2$ und damit $|x| \leq 2a$. Ferner gilt

$$0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{4a^2 + 4a^2}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 4a \quad \forall (x,y,z) \in A.$$

Damit ist A beschränkt und nach Satz 3.12 auch kompakt. Da $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}^3$ kann A nach Übung nicht offen sein. Insgesamt folgt die Behauptung.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt $f(0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) \neq 0$. Da $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ existieren nach dem Satz über implizit definierte Funktionen offene Intervalle $U, V \subset \mathbb{R}$ mit $y_0 \in U$, $0 \in V$ und eine Funktion $g \in C^1(U, V)$:

$$f(x,y) = 0, \quad (x,y) \in V \times U \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) = (g(y), y), \quad (x,y) \in V \times U.$$

Nach Voraussetzung wissen wir bereits $f(0,y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und damit gilt $g(y) = 0$ für alle $y \in U$. Sei nun $((x_n, y_n))_n \subset \mathbb{R}^2$ eine Folge mit

$$(x_n, y_n) \to (0, y_0) \quad (n \to \infty) \quad \text{und} \quad f(x_n, y_n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $(x_n, y_n) \in V \times U$ für alle $n \geq N$. Es folgt $(x_n, y_n) = (g(y_n), y_n) = (0, y_n)$ für $n \geq N$ und damit die Behauptung.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

a) Wir definieren die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, Lx := 0$. Es gilt $f(0) = 0$ und damit erhalten wir

$$|f(h) - f(0) - Lh| = |f(h)| \leq \|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

und insbesondere $|f(h) - f(0) - Lh| = o(\|h\|)$ für $h \to 0$. Damit ist f im Punkt $x = 0$ vollständig differenzierbar mit $Df(0) = L$.

b) Wir zeigen, dass $|f(x,y)| \leq (x^2 + y^2)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann folgt aus Teil a), dass f im Punkt $(x,y) = (0,0)$ vollständig differenzierbar ist und $Df(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto 0$. Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq (x^4 - y^2)^2 = x^8 - 2x^4y^2 + y^4 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x^4y^2 \leq x^8 + 2x^4y^2 + y^4 = (x^4 + y^2)^2$$

und daher

$$\frac{4x^4y^2}{(x^4 + y^2)^2} \leq 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Nach dem Mittelwertsatz aus der Analysis 1 folgt für $z \in \mathbb{R}$,

$$|\cos(z) - 1| = |\sin(tz)||z| \leq |z| \quad \text{mit } t = t(z) \in (0,1).$$

Also erhalten wir für $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\cos(xy) - 1| \leq |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq \|(x,y)\|^2.$$

Insgesamt folgt

$$|f(x,y)| \leq \left| \frac{4x^4y^2}{(x^4 + y^2)^2}(\cos(xy) - 1) \right| \leq \|(x,y)\|^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und damit die Behauptung.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Behauptung: $\inf\{\|v-p\|^2:\ v\in R\} = 3-\sqrt{2}2$.

Beweis. Definiere die Funktionen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, (x,y,z)\mapsto (x-1)^2+(y+1)^2+z^2$, $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, (x,y,z)\mapsto x^2+y^2-z^2-1$. Dann sind $f,g\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ und das Minimierungsproblem lässt sich schreiben als:

$$\inf\{f(x,y,z):\ (x,y,z)\in N\} \quad \text{mit} \quad N:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ g(x,y,z)=0\}.$$

Existenz eines Minimierers: Sei $((x_n,y_n,z_n))_n$ eine Folge in N mit

$$f(x_n,y_n,z_n)\to\inf\{f(x,y,z):\ (x,y,z)\in N\} \quad (n\to\infty).$$

Wegen $f(x,y,z)\to\infty$ für $\|(x,y,z)\|\to\infty$ ist $((x_n,y_n,z_n))_n$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß finden wir eine konvergente Teilfolge:

$$(x_{n_k},y_{n_k},z_{n_k})\to(x^*,y^*,z^*) \quad (k\to\infty).$$

Da g stetig und $\{0\}$ abgeschlossen ist, ist N abgeschlossen. Also folgt $(x^*,y^*,z^*)\in N$. Stetigkeit der Funktion f liefert nun

$$\inf\{f(x,y,z):\ (x,y,z)\in N\} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k},y_{n_k},z_{n_k}) = f(x^*,y^*,z^*)$$

und damit $\inf\{f(x,y,z):\ (x,y,z)\in N\} = \min\{f(x,y,z):\ (x,y,z)\in N\} = f(x^*,y^*,z^*)$. Also ist die Existenz eines Minimierers gezeigt. (Alternativ folgt die Existenz auch aus der Übung (vgl. K-Aufgabe 36))

Berechnung des Minimierers: Weiter ist wegen $(0,0,0)\notin N$, $\nabla g(x^*,y^*,z^*) = 2(x^*,y^*,-z^*)\neq(0,0,0)$ und daher $\mathrm{Rang}(\nabla g(x^*,y^*,z^*))=1$. Nach Satz 7.1 existiert $\lambda\in\mathbb{R}$ mit

$$0=\nabla f(x^*,y^*,z^*)+\lambda\nabla g(x^*,y^*,z^*) = 2(x^*-1,y^*+1,z^*)+2\lambda(x^*,y^*,-z^*).$$

und wir erhalten das System

$$\begin{cases} x^*(1+\lambda)=1,\\ y^*(1+\lambda)=-1,\\ z^*=\lambda z^*.\end{cases}$$

Wir erkennen, dass $\lambda=1$ unmöglich ist (da für $x^*=1/2, y^*=-1/2$ folgt: $(x^*)^2+(y^*)^2-(z^*)^2 = 1/2-(z^*)^2\leq 1/2$) und daher folgt $z^*=0$ und $x^*=1/(1+\lambda)=-y^*$ (beachte, dass $\lambda\neq-1$). Mit $(x^*)^2+(y^*)^2=1$ folgt

$$(x^*,y^*)=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{oder} \quad (x^*,y^*)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Einsetzen liefert

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)=3-2\sqrt{2}<3+2\sqrt{2}=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$$

und wir erhalten $\inf\{\|x-x^*\|^2:\ x\in R\}=3-2\sqrt{2}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:
Wir bestimmen zunächst alle Eigenwerte der Matrix

$$A=\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&0&-2\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $p(\lambda)=\lambda^3-2\lambda-4=(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+2)=(\lambda-2)(\lambda+1-\mathrm{i})(\lambda+1+\mathrm{i})$ und damit folgt

$$\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}=\{2,-1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i}\}.$$

Seien $v_1,v_2\in\mathbb{C}^3\setminus\{0\}$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten $2,-1+\mathrm{i}$. Dann sind nach Lemma 9.2 alle Lösungen der Differentialgleichung gegben durch

$$y(x)=c_1\mathrm{e}^{2x}v_1+c_2\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}v_2+c_2\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})x}\bar{v}_2, \quad x\in\mathbb{R}, c_1,c_2,c_3\in\mathbb{C}.$$

Wegen $e^{2x} \to \infty, e^{(-1\pm i)x} \to 0$ für $x \to \infty$, gilt für jede Lösung y mit $y(x) \to \infty$ für $x \to \infty$, dass $c_1 = 0$. Nach Vorlesung finden wir reellwertige linear unabhängige Lösungen

$$y_1(x) = \mathrm{Re}(e^{(-1+i)x} v_2), \quad y_2(x) = \mathrm{Im}(e^{(-1+i)x} v_2).$$

Wir berechnen nun $\ker(A + 1 - i)$. Es gilt

$$\ker \begin{pmatrix} 1-i & -2 & 0 \\ 0 & 1-i & -2 \\ 1 & -1 & 1-i \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-i \\ 0 & 1-i & -2 \\ 0 & -1-i & 2i \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-i \\ 0 & 1 & -1-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2i \\ 0 & 1 & -1-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und damit folgt

$$e^{(-1+i)x} \begin{pmatrix} 2i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-x} \left(\begin{pmatrix} -2\sin x \\ \cos x - \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\cos x \\ \sin x + \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \right).$$

Es folgt, dass alle reellwertigen Lösungen mit $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ gegeben sind durch $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

$$y_1(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} -2\sin x \\ \cos x - \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad y_2(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 2\cos x \\ \sin x + \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:
Definiere die Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F(x, y) = \frac{1}{2} \cosh^2(x) + x^2 y^2 + x^4 + y^4.$$

Dann ist $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $\nabla F(x, y) = f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Also besitzt f auf $\mathbb{R}^2$ eine Stammfunktion. Da $\mathbb{R}^2$ konvex ist, sind alle Stammfunktionen von f gegeben durch $F + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ (siehe Korollar 4.16 aus der Vorlesung). Sei nun $c \in \mathbb{R}$ beliebig und betrachte die Menge N_c. Ist $N_c = \emptyset$ so ist nichts zu zeigen. Nehmen wir also an, dass $N_c \neq \emptyset$. Es gilt

$$2F(x, y) \geq 2x^2 y^2 + x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 = \|(x, y)\|^4.$$

Anngenommen, N_c ist unbeschränkt. Dann finden wir eine Folge $((x_n, y_n))_n \subset N_c$ mit $\|(x_n, y_n)\| \to \infty$ für $n \to \infty$. Daraus folgt

$$c = F(x_n, y_n) \geq \frac{1}{2} \|(x_n, y_n)\|^4 \to \infty \quad (n \to \infty),$$

ein Widerspruch. Folglich ist N_c entweder leer oder beschränkt.