1 Eigenschaften von Funktionen

Gegeben sei $f\colon X \to Y$.

Bild: $f(A) = \{f(x)\colon x \in A\}$

Urbild: $f^{-1}(B) \coloneqq \{x \in X : f(x) \in B\}$

Surjektiv: $f(X) = Y$

Injektiv: $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

Bijektiv: f ist injektiv und surjektiv

2 Die reellen Zahlen

Dreiecksungleichung: $|a+b| \leq |a| + |b|$

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Binomialsatz: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$

Bernoullische Ungleichung: $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Mittelungleichungen: für alle $a, b \geq 0$ gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

3 Komplexe Zahlen

Gegeben seien $z, w \in \mathbb{C}$, $z \coloneqq a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$

Polardarstellung: $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, wobei
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a}, & a > 0, \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi, & a < 0,\ b \geq 0, \\ \arctan \frac{b}{a} - \pi, & a < 0,\ b < 0. \end{cases}$$

Eulersche Formel: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

Wurzeln: Lösungen von $z^n = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ sind
$z_k = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k + \varphi}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n-1$

Sonstiges: $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
$|z+w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)
$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
$|z+w|^2 = (z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w}) =$
$= |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(w\overline{z})$

4 Folgen und Konvergenz

Gegeben: Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$

Nullfolge: $a_k \to 0\ (k \to \infty)$

Beschränktheit: $M > 0$ existiert so, dass $|a_k| \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Monotonie: reelle Folge (a_k) monoton wachsend/fallend falls $\forall k \in \mathbb{N}\colon a_k \leq / \geq a_{k+1}$. Streng monoton wenn $<$ / $>$ statt $\leq$ / $\geq$.

Bolzano–Weierstraß: Wenn $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann hat $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Grenzwerte

$\sqrt[n]{n^k} \xrightarrow{n\to\infty} 1,\ k \in \mathbb{R}$	$\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n\to\infty} 1,\ a \in \mathbb{R}$
$\sqrt[n]{n!} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$	$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}$
$(1 + \frac{x}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}^x$	

5 Reihen

Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ falls $|x| < 1$, sonst divergent
Außerdem: $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für $|x| \neq 1$

Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergent für $\alpha > 1$, divergent für $\alpha \leq 1$

Exponentialreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$

Konvergenzkriterien

Nullfolgenkriterium: (a_k) keine Nullfolge $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. Außerdem: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\implies (a_k)$ ist Nullfolge

Leibnizkriterium: (a_k) monoton fallende Nullfolge $\implies \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$ konvergiert

Wurzelkriterium: Sei (a_k) eine Folge und $\alpha \coloneqq \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, \infty]$. Gilt

- $\alpha < 1$, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.
- $\alpha > 1$, divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
- $\alpha = 1$, ist keine allgemeine Aussage möglich.

Quotientenkriterium: Sei (a_k) eine Folge mit $a_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Gilt

- $\liminf\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1$, divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
- $\limsup\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.
- $\liminf\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq 1 \leq \limsup\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}|$, ist keine Aussage möglich.

Majorantenkriterium: Seien $(a_k), (b_k)$ Folgen mit $|a_k| \leq b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Minorantenkriterium: Seien $(a_k), (b_k)$ Folgen mit $a_k \geq b_k \geq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Potenzreihen

Exponentialfunktion: $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},\ x \in \mathbb{C}$

Sinus: $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ x \in \mathbb{C}$

Kosinus: $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},\ x \in \mathbb{C}$

Natürlicher Logarithmus:
$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k,\ x \in (-1, 1]$

Bestimmung Konvergenzbereich

Gegeben sei Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$

1. Konvergenzradius

   Cauchy-Hadamard: $R := \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$

   Über Quotienten: Sei $a_k \neq 0$ für fast alle k und $\alpha := \lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| \implies R := \frac{1}{\alpha}$
2. Absolute Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$
3. Divergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$
4. Der Fall $|z - z_0| = R$ muss gesondert untersucht werden

6 Trigonometrische Funktionen

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Arkusfunktionen:
$\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$
$\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Additionstheoreme:
$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

Produkte:
$2\sin x \cdot \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$
$2\cos x \cdot \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$
$2\sin x \cdot \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$

Symmetrie:
$\cos x = \cos(-x)$
$\sin x = -\sin(-x)$
$\cos(x + \pi) = -\cos x$
$\sin(x + \pi) = -\sin x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

7 Stetigkeit

Definition: $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, wenn für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt.

Eigenschaften: Summen, Produkte und Verkettungen von stetigen Funktionen sind stetig.

Zwischenwertsatz: Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für jedes y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.

Extremwerte: $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt kompakt, wenn D beschränkt und abgeschlossen ist. Eine stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit kompaktem D nimmt Minimum und Maximum an.

8 Funktionenfolgen

Gegeben: $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Pktw. Konvergenz: Die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$, wenn $\forall\, x \in D\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Glm. Konvergenz: Die Folge (f_n) konvergiert gelichmäßig gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$, wenn $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall\, x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

9 Differentialrechnung

Ableitungsregeln: Seien f, g differenzierbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $\alpha f + \beta g = \alpha f' + \beta g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel)
- $(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$ (Kettenregel)

Satz über Umkehrfunktion: Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf D. Ist f in $x_0 \in D$ differenzierbar, $f'(x_0) \neq 0$, so ist $f^{-1}\colon f(D) \to \mathbb{R}$ in $y_0 \coloneqq f(x_0)$ differenzierbar und $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Mittelwertsatz: Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Satz von Taylor: Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar, $f^{(n)}$ differenzierbar und $x, x_0 \in D$. Dann gibt es ξ zwischen x und x_0 mit $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Regel von de l'Hôspital: Seien f, g auf (a,b) differenzierbar mit $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x) = L$, $L \in \{0, \pm\infty\}$, $g'(x) \neq 0$ auf (a,b). Dann $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ sofern rechte Seite existiert oder $\pm\infty$.

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$

10 Integralrechnung

Hauptsatz:

(1) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $G' = f$ gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a)$.

(2) $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto F(x) \coloneqq \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ $\implies$ F ist differenzierbar mit $F' = f$.

Part. Integration: $\int f'g\,\mathrm{d}x = fg - \int fg'\,\mathrm{d}x$

Substitution: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$, wobei $x = g(t)$, $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$.

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1},\ n \neq -1$
e^{ax}	$\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
$\log x$	$x\log x - x$
$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$
$\sin^2(ax)$	$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin(2ax)$
$\cos^2(ax)$	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin(2ax)$
$\sin(ax)\cos(ax)$	$\frac{1}{2a}\sin^2(ax)$

Konvergenzsatz: Seien $f_n \in R[a,b]$, (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt $f \in R[a,b]$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Vertauschung von Grenzwert und Ableitung: Seien $f_n \in C^1([a,b])$, (f_n) konvergiert punktweise gegen f und (f_n') konvergiert gleichmäßig gegen g. Dann: $f'(x) = g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ für alle $x \in [a,b]$.

11 Uneigentliche Integrale

Typ 1: $\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \coloneqq \lim\limits_{r\to\beta-} \int_a^r f(x)\,\mathrm{d}x$, falls der Grenzwert existiert.

Typ 2: $\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x \coloneqq \lim\limits_{r\to\alpha+} \int_r^b f(x)\,\mathrm{d}x$, falls der Grenzwert existiert.

Beispiele: $\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\alpha > -1$ und $\int_1^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x$ konvergent $\Leftrightarrow \alpha < -1$.

Majorantenkriterium: Seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $|f| \leq g$ und $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiere. Dann konvergiert $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ absolut.

Minoratenkriterium: Seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $0 \leq g \leq f$ und $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ divergiere. Dann divergiert $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Cauchykriterium: Das Integral $\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert, wenn: $\forall \epsilon > 0\ \exists c \in (\alpha, \beta) : |\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x| < \epsilon\ \forall u, v \in (c, \beta)$.

Vergleichsprinzip: Seien $m \in \mathbb{N}$ und $f\colon [m, \infty) \to (0, \infty)$ monoton fallend. Dann konvergiert $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ genau dann wenn $\int_m^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

12 Differentialgleichungen

Lineare DGL 1. Ordnung: $y' = a(x)y + b(x)$.
Lösung der homogenen Gleichung: $\Phi_{\text{hom}}(x) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{A(x)}$ mit $A(x) = \int_{x_0}^x a(t)\,\mathrm{d}t$.
Lösung der gesamten Gleichung: $\Phi(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \cdot (y_0 + C(x))$ mit $C(x) \coloneqq \int_{x_0}^x \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\,\mathrm{d}t$

DGL mit getrennten Veränderlichen: $y' = f(x)g(y)$
Umstellen führt zu $\int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$, dann Auflösen nach $y(x)$.

Lineare DGL 2. Ordnung: $y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.
Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) \coloneqq \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ mit Nullstellen $\lambda_{1/2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$.
Drei Fälle:

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \Phi_1(x) \coloneqq \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ und $\Phi_2(x) \coloneqq \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \Phi_1(x) \coloneqq \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ und $\Phi_2(x) \coloneqq x\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$
  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta \Rightarrow \Phi_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$ und $\Phi_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $\Phi_{\text{hom}}(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Bei Inhomogenität
$b(x) = q_m(x)\mathrm{e}^{\mu x}\begin{cases}\cos(\rho x)\\ \sin(\rho x)\end{cases}$, lautet der
Ansatz für partikuläre Lösung: $\Phi_{\mathrm{P}}(x) = [r_m(x)\cos(\rho x) + s_m(x)\sin(\rho x)]\,\mathrm{e}^{\mu x}x^{\nu}$, wobei ν die Vielfachheit der Nullstelle $\mu + \mathrm{i}\rho$ von $p(\lambda)$ ist; falls $p(\mu + \mathrm{i}\rho) \neq 0$, dann $\nu = 0$.

13 Lineare Algebra

Gegeben: Lineare Abbildung $\phi\colon V \to W$, Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, Vektor $\vec{b} \in \mathbb{K}^m$.

Untervektorraum-Kriterium: U ist Untervektorraum von V genau dann wenn $0 \in U$ und aus $u, v \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$ stets $u + v \in U$ und $\alpha v \in U$ folgt.

Lineare Unabhängigkeit $v_1, ..., v_n \in V$ sind linear unabhängig genau dann wenn aus $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ und $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ stets $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ folgt.

Kern: $\operatorname{Kern}\phi = \{v \in V : \phi(v) = 0\}$,
$\operatorname{Kern} A = \{\vec{v} \in \mathbb{K}^m\colon A\vec{v} = 0\} \subseteq \mathbb{K}^m$

Bild: $\operatorname{Bild}\phi = \{\phi(v) : v \in V\}$,
$\operatorname{Bild} A = \{A\vec{v}\colon \vec{v} \in \mathbb{K}^m\} \subseteq \mathbb{K}^n$

Dimensionsformel:
$m = \dim(\operatorname{Bild} A) + \dim(\operatorname{Kern} A)$

Rang: Maximalzahl lin. unabhängiger Zeilen/Spalten, $\operatorname{Rang} A = \dim(\operatorname{Bild} A)$

Elementare Umformungen:

1. Zeilen vertauschen
2. Multiplikation von Zeile mit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
3. Addition λ-fache von Zeile auf andere Zeile

Skalarprodukt: $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{K}$

- $\overline{(v|u)} = (u|v)\ \forall u, v \in V$
- $(\alpha v + u|w) = \alpha(v|w) + (u|w)\ \forall u, v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$
- $(u|u) > 0\ \forall u \in V \setminus \{0\}$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: für alle $u, v \in V$ gilt: $|(u|v)| \leq (u|u)^{\frac{1}{2}}(v|v)^{\frac{1}{2}}$