

1 Eigenschaften von Funktionen

Gegeben sei $f: X \rightarrow Y$.

Bild: $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$

Urbild: $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$

Surjektiv: $f(X) = Y$

Injektiv:

$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

Bijektiv: f ist injektiv und surjektiv

2 Die reellen Zahlen

Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Binomialsatz: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$,
 $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$

Bernoullische Ungleichung: für alle $x \geq -1$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

Mittelungleichungen: für alle $a, b \geq 0$ gilt
 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

3 Komplexe Zahlen

Gegeben seien $z, w \in \mathbb{C}$, $z := a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

Polardarstellung: $z = re^{i\varphi}$, wobei
 $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ und $\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$

Eulersche Formel: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

Wurzeln: Lösungen von $z^n = re^{i\varphi}$ sind
 $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{2\pi k + \varphi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

Sonstiges: $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

$|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$

$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$

$|z + w|^2 = (z + w) \cdot (\bar{z} + \bar{w}) =$
 $= |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(w\bar{z})$

4 Folgen und Konvergenz

Gegeben: Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$

Nullfolge: $a_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)

Beschränktheit: $M \geq 0$ existiert so, dass
 $|a_k| \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Monotonie: reelle Folge (a_k) monoton wachsend/fallend falls $\forall k \in \mathbb{N} : a_k \leq / \geq a_{k+1}$.
 Streng monoton wenn $< / >$ statt $\leq / \geq$.

Bolzano-Weierstraß: Wenn $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann hat $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Grenzwerte

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[n]{n^a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, a \in \mathbb{R} & \sqrt[n]{a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, a > 0 \\ \sqrt[n]{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty & \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \\ (1 + \frac{x}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x & n^a e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, a \in \mathbb{R} \end{array}$$

5 Reihen

Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ falls $|x| < 1$, sonst divergent

Außerdem: $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für $x \neq 1$

Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergent für $\alpha > 1$, divergent für $\alpha \leq 1$

Konvergenzkriterien

Nullfolgenkriterium: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\implies (a_k)$ ist Nullfolge

Leibnizkriterium: (a_k) monoton fallende Nullfolge $\implies \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$ konvergiert

Wurzelkriterium: Sei (a_k) eine Folge und $\alpha := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, \infty]$. Gilt

- $\alpha < 1$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.
- $\alpha > 1$, so divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
- $\alpha = 1$, so ist keine allgemeine Aussage möglich.

Quotientenkriterium: Sei (a_k) eine Folge mit $a_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Gilt

- $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$, so divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1$, so ist keine allgemeine Aussage möglich.

Majorantenkriterium: Seien $(a_k), (b_k)$ Folgen mit $|a_k| \leq b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Minorantenkriterium: Seien $(a_k), (b_k)$ Folgen mit $a_k \geq b_k \geq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Potenzreihen

Exponentialfunktion:

$$\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Sinus: $\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$

Kosinus: $\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad z \in \mathbb{C}$

Natürlicher Logarithmus:

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, \quad x \in (-1, 1]$$

Bestimmung Konvergenzbereich

Gegeben sei Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$

- Konvergenzradius R :

Cauchy-Hadamard: $R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$

Über Quotienten: Sei $a_k \neq 0$ für fast alle k und $\alpha := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \implies R = \frac{1}{\alpha}$

- Absolute Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$
- Divergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$
- Der Fall $|z - z_0| = R$ muss gesondert untersucht werden

6 Trigonometrische Funktionen

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Arkusfunktionen:

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Additionstheoreme:

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

Symmetrie:

$$\cos x = \cos(-x)$$

$$\sin x = -\sin(-x)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

7 Stetigkeit

Definition: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, wenn für jede Folge (x_n) in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt.

Eigenschaften: Summen, Produkte und Verkettungen von stetigen Funktionen sind stetig.

Zwischenwertsatz: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für jedes y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.

Extremwerte: $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt kompakt, wenn D beschränkt und abgeschlossen ist. Eine stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem $D \neq \emptyset$ nimmt Minimum und Maximum an.

8 Funktionenfolgen

Gegeben: $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Pktw. Konvergenz: Die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn $\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Glm. Konvergenz: Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

9 Differentialrechnung

Ableitungsregeln: Seien f, g differenzierbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\bullet \alpha f + \beta g = \alpha f' + \beta g'$$

- $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel)
- $(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$ (Kettenregel)

Satz über Umkehrfunktion: Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar, $f'(x_0) \neq 0$, so ist $f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Mittelwertsatz: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Satz von Taylor: Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $n + 1$ -mal differenzierbar und $x, x_0 \in I$. Dann gibt es ξ zwischen x und x_0 mit $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$.

Regel von de l'Hospital: Seien f, g auf (a, b) differenzierbar mit $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \pm\infty$ oder $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$. Dann $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ sofern $g'(x) \neq 0$ auf (a, b) und rechter Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert.

$f(x)$	$f'(x)$
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$

10 Integralrechnung

Hauptsätze: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

- (1) Ist $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $G' = f$, so gilt $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$.

- (2) $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto F(x) := \int_a^x f(\xi) d\xi$ ist differenzierbar mit $F' = f$.

Part. Integration: $\int f'g dx = fg - \int fg' dx$

Substitution: $\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt$, wobei $x = g(t)$, $dx = g'(t) dt$.

$f(x)$	$\int f(x) dx$
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}, a \neq -1$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}, a \neq 0$
$\frac{1}{x}$	$\log x $
$\log x$	$x \log x - x$
$\tan x$	$-\log \cos x $
$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$
$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$
$\sin(x) \cos(x)$	$\frac{1}{2}\sin^2(x)$

Konvergenzsatz: Seien $f_n \in R([a, b])$, und (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt $f \in R([a, b])$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b f(x) dx$.

Vertauschung von Grenzwert und Ableitung: Seien $f_n \in C^1([a, b])$, (f_n) konvergiere punktweise gegen f und (f'_n) konvergiere gleichmäßig gegen g . Dann: $f'(x) = g(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

11 Uneigentliche Integrale

Definition $\int_a^\beta f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \beta^-} \int_a^r f(x) dx$, falls der Grenzwert existiert.

Majorantenkriterium: Seien $f, g: [a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, $|f| \leq g$ und $\int_a^\beta g(x) dx$ konvergiere. Dann konvergiert $\int_a^\beta f(x) dx$ absolut.

Minoratenkriterium: Seien $f, g: [a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq g \leq f$ und $\int_a^\beta g(x) dx$ divergiere. Dann divergiert $\int_a^\beta f(x) dx$.

Cauchy Kriterium: Das Integral $\int_a^\beta f(x) dx$ konvergiert, wenn: $\forall \varepsilon > 0 \exists c \in (a, \beta) \forall u, v \in (c, \beta): |\int_u^v f(x) dx| < \varepsilon$.

Analog für uneigentliche Integrale $\int_\alpha^b f(x) dx$.

Beispiele: $\int_0^1 x^s dx$ konvergent $\Leftrightarrow s > -1$
und $\int_1^\infty x^s dx$ konvergent $\Leftrightarrow s < -1$.

12 Differentialgleichungen

Lineare DGL 1. Ordnung: $y' = a(x)y + b(x)$.
Lösung der homogenen Gleichung: $y_h(x) = ce^{A(x)}$ mit A Stammfunktion von a .

Ansatz für spezielle Lösung: $y_p(x) = c(x)e^{A(x)}$.

DGL mit getrennten Veränderlichen: $y' = f(x)g(y)$

Umstellen führt zu $\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(t)} dt = \int_{x_0}^x f(t) dt$,
dann Auflösen nach $y(x)$.

Lineare DGL 2. Ordnung: $y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$.

Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) := \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$.

Drei Fälle:

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow u(x) := e^{\lambda_1 x}$
und $v(x) := e^{\lambda_2 x}$
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow u(x) := e^{\lambda_1 x}$
und $v(x) := x e^{\lambda_1 x}$
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$
 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow u(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ und
 $v(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:
 $y_h(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Bei Inhomogenität der Form

$$b(x) = q_m(x)e^{\mu x} \begin{cases} \cos(\rho x) \\ \sin(\rho x) \end{cases}, \text{ lautet der}$$

Ansatz für partikuläre Lösung: $y_p(x) = [r_m(x) \cos(\rho x) + s_m(x) \sin(\rho x)] e^{\mu x} x^\nu$, wobei
 ν die Vielfachheit der Nullstelle $\mu + i\rho$ von $p(\lambda)$ ist; falls $p(\mu + i\rho) \neq 0$, dann $\nu = 0$.

13 Lineare Algebra

Gegeben: Lineare Abbildung $\phi: V \rightarrow W$, Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$.

Untervektorraum-Kriterium: U ist Untervektorraum von V genau dann wenn $0 \in U$ und aus $u, v \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$ stets $u + v \in U$ und $\alpha v \in U$ folgt.

Lineare Unabhängigkeit $v_1, \dots, v_n \in V$ sind linear unabhängig genau dann wenn aus

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ und $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ stets $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ folgt.

Kern: Kern $\phi = \{v \in V : \phi(v) = 0\}$,
Kern $A = \{\vec{v} \in \mathbb{K}^m : A\vec{v} = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{K}^m$

Bild: Bild $\phi = \{\phi(v) : v \in V\}$,
Bild $A = \{A\vec{v} : \vec{v} \in \mathbb{K}^m\} \subseteq \mathbb{K}^n$

Dimensionsformel:

$$m = \dim(\text{Bild } A) + \dim(\text{Kern } A)$$

Rang: Maximalzahl lin. unabhängiger Zeilen/Spalten, Rang $A = \dim(\text{Bild } A)$

Elementare Umformungen:

- Zeilen vertauschen
- Multiplikation von Zeile mit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
- λ -faches von Zeile zu anderer Zeile addieren

14 Eigene Formeln

