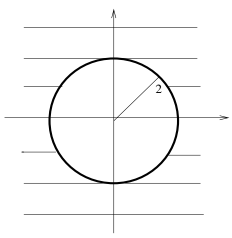
Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie
— L ö s u n g e n —

Aufgabe 1

a) Geometrische Reihe: Konvergenz liegt vor für

$$\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{w}\right| < 1 \Longleftrightarrow |w| > 2$$



b) Für $|w| > 2$ lautet die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{w}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1+i\sqrt{3}}{w}} = \frac{w}{w-(1+i\sqrt{3})} = \zeta$$

mit der Lösung

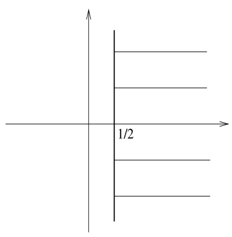
$$w(\zeta) = -\frac{\zeta(1+i\sqrt{3})}{1-\zeta}\ .$$

Sie existiert nur, falls

$$|w(\zeta)| = \frac{2|\zeta|}{|1-\zeta|} > 2 \Longleftrightarrow |\zeta| > |1-\zeta|$$

gilt. Mit $\zeta = \xi + i\eta$ bedeutet dies

$$\xi^2+\eta^2 > (1-\xi)^2+\eta^2 \Longleftrightarrow \xi = \Re\zeta > \frac{1}{2}\ .$$



Aufgabe 2

a) $$n > 2: \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m} - \sum_{m=3}^{n+1}\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$\Longrightarrow \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}$$

$$n > 2: \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m} - \sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$
$$\Longrightarrow \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}\,.$$

Der gesuchte Wert ist $\frac{3}{2}$.

b) Es gilt
$$e^{\frac{1}{1\cdot 2}} \cdot e^{\frac{1}{2\cdot 3}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{1}{n(n+1)}} = e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}}$$
und nach a)
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$
Mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt
$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{1\cdot 2}} \cdot e^{\frac{1}{2\cdot 3}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{1}{n(n+1)}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})} = e$$

Aufgabe 3

a) f_α ist für $x \neq 0$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen selbst stetig.
Mit
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots$$
erhalten wir für $x \to 0$
$$f_\alpha(x) = \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2(1 + o(x^2))} = \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)}\,,$$
also
$$\lim_{x\to 0} f_\alpha(x) = -\frac{1}{2} =: \alpha_0 = f_{\alpha_0}(0)$$
$f_{-\frac{1}{2}}$ ist somit stetig für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Für $x \neq 0$ ist $f_{-\frac{1}{2}}$ als Zusammensetzung differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar mit

$$f'_{-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2} + \frac{1}{x^2} .$$

Für den bezüglich der Stelle 0 gebildeten Differenzenquotienten gilt für $x \to 0$

$$\begin{aligned}
\frac{f_{-\frac{1}{2}}(x) - f_{-\frac{1}{2}}(0)}{x} &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2x - 2(e^x-1) + x(e^x-1)}{2x^2(e^x-1)} = \frac{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})x^3 + o(x^3)}{2x^2(x+o(x))} \\
&= \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{2(1+o(1))} .
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$f'_{-\frac{1}{2}}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_{-\frac{1}{2}}(x) - f_{-\frac{1}{2}}(0)}{x} = \frac{1}{12} .$$

Aufgabe 4

a) I ist an der unteren und oberen Integrationsgrenze kritisch:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} =: I_1 + I_2$$

Es ist Konvergenz von I_1 und I_2 zu zeigen:

$I_1 : 1 < x \leq 2$:

$$\left|\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right| = \frac{1}{x\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} .$$

Da

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}\Big|_1^2 = 2$$

konvergiert, konvergiert auch I_1 nach dem Majorantenkriterium.

$I_2 : x \geq 2$:

$$\left|\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x^2} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x^2} \;(\text{ wegen } \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2})$$

Nun ist

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{x}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

konvergent. Majorantenkriterium: I_2 konvergent.

b) Substitution: $t = \sqrt{x^2-1} : dt = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dx$

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{t\to\infty} \arctan t - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$