Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A und P durch ihre Ortsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sowie die Gerade g durch die Gleichung

$$\vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \;,\; \lambda \in \mathbb{R} \;,$$

gegeben.

a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der g und A liegen. Berechnen Sie einen Normalenvektor dieser Ebene.

b) Es sei h die Gerade durch A und P. Die Punkte M und B mit den Ortsvektoren $\vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ 1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}$ liegen auf h.
M sei der Mittelpunkt der Strecke $[A\,B]$. Berechnen Sie die Koordinaten von $\vec{m}$ und $\vec{b}$.

c) Berechnen Sie: $\dfrac{\text{Länge der Strecke } [A\,P]}{\text{Länge der Strecke } [B\,P]}$.

d) Der Punkt C mit Ortsvektor $\vec{c}$ liegt auf g und bildet mit den Punkten A und B ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis $[A\,B]$ ist. Berechnen Sie die Koordinaten von $\vec{c}$.

(**Hinweis** für c) und d): $\vec{b} = (3, -1, 3)^T$)

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Es sei $t \in \mathbb{R}$ und $z(t) = 1 - e^{it}$. Berechnen Sie $\operatorname{Re} z(t),\ \operatorname{Im} z(t),\ |z(t)|$.

b) Schreiben Sie $|z(t)|$ in der Form $a \sin \dfrac{t}{2}$. (Es ist a zu bestimmen.)

c) Schreiben Sie $|z(t)|$ mit der komplexen Exponentialfunktion.

d) Berechnen Sie $\arg z(t)$.

e) Schreiben Sie $\dfrac{1 - e^{it}}{1 - e^{-it}}$, $t \in \mathbb{R}$, in Polarform.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Skizzieren Sie die folgende Menge in der (x, y)–Ebene:

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |y| \leq 3\,,\ -3 \leq x - y \leq 3\}\ .$$

b) Es sei $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \leq 3\,, \\ 0 & , \quad |x| > 3\,. \end{cases}$ Berechnen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, f(y)\, dy\ .$$

c) Skizzieren Sie $y = g(x),\ x \in \mathbb{R}$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist g stetig?

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass die Potenzreihenentwicklung um $x_0 = 0$ von

$$f(x) := \ \ln\,(1+x) - \frac{\alpha x}{1+\beta x}$$

mit einer möglichst hohen Potenz von x beginnt.

b) Berechnen Sie die Potenzreihe von f um $x_0 = 0$ mit den in $a)$ bestimmten Zahlen α, β.

c) Geben Sie den Konvergenzradius der Reihe aus $b)$ an. Geben Sie an, für welche x die Reihe konvergiert und für welche x sie divergiert.
Bestimmen Sie $f^{(221)}(0)$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Montag, dem 17.10.05, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, dem 25. Oktober 05, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt.
Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 31.10.05 bis 04.11.05.