VD HMI 26.9.2005

Aufgabe 1

a) In der Ebene E liegt P. Zwei Richtungen in E sind

$\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{p})$ und $\begin{pmatrix}-5\\4\\2\end{pmatrix}$, die Richtung von g.

$$E: \vec{x}(s,t) = \begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-5\\4\\2\end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R}.$$

$\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-5\\4\\2\end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor für E.

b) Gleichung für h: $\vec{y}(\lambda) = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}.$

M ∈ h bedeutet: $\begin{pmatrix}m_1\\1\\m_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\lambda\\3-2\lambda\\-1+2\lambda\end{pmatrix} \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow \vec{m} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{b} - \vec{a} = 2(\vec{m} - \vec{a}) \rightarrow \vec{b} = 2\vec{m} - \vec{a} = \begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$

c) $\|\vec{a}-\vec{p}\| = 3 \cdot 3 = 9$, $\|\vec{b}-\vec{p}\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}\right\| = 3$

Das gesuchte Verhältnis ist 3.

d) Die Gerade durch M und C ist ⊥ h und ⊥ Normale von E:

wegen $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ Richtungsvektor der Geraden durch M und C. Diese Gerade $\vec{x}(\tau) = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\tau \in \mathbb{R}$

schneidet g: $\vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-5\\4\\2\end{pmatrix}$ in C $\rightarrow \lambda = 2, \tau = 4$

$$\rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\5\\9\end{pmatrix}$$

VD HMI 26.9.2005

Aufgabe 2

a) Mit $e^{it} = \cos t + i \sin t$ und $t \in \mathbb{R}$ und $|z(t)|^2 = \operatorname{Re} z(t)^2 + \operatorname{Im} z(t)^2$:

$\underline{\operatorname{Re} z(t) = 1 - \cos t}$, $\underline{\operatorname{Im} z(t) = -\sin t}$, $\underline{|z(t)| = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}$

b) Aus $2(1-\cos t) = a^2 \sin^2\frac{t}{2}$ und $\cos t = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}$

erhält man $4\sin^2\frac{t}{2} = a^2 \sin^2\frac{t}{2}$ und somit

$$|z(t)| = \begin{cases} 2\sin\frac{t}{2} & , 0 \le t \le 2\pi \\ -2\sin\frac{t}{2} & , 2\pi \le t \le 4\pi \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l}\text{und}\\ \text{periodisch}\\ \text{fortsetzen}\end{array}\right)$$

c) Mit $\sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$ und $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ erhält man

$$\underline{|z(t)|} = 2\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}\right) = \underline{e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2})} - e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2})}} \quad \underline{\text{für } 0 \le t \le 2\pi}$$

bzw.: $\underline{|z(t)| = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2})} - e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2})}}$ für $\underline{2\pi \le t \le 4\pi}$

d) Für $\arg z(t) = \alpha(t)$ gilt $z(t) = 1 - e^{it} = |z(t)|\, e^{i\alpha(t)}$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 - e^{it} = e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} + \alpha(t))} - e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}+\alpha(t))}$$

$$\longrightarrow \quad \underline{\alpha(t) = \frac{t}{2} - \frac{\pi}{2} \quad , 0 \le t \le 2\pi}$$

Für $\underline{2\pi \le t \le 4\pi}$ folgt aus $z(t) = |z(t)|\, e^{i\alpha(t)}$ wegen

$$1 - e^{it} = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}+\alpha(t))} - e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}+\alpha(t))} : \underline{\alpha(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{t}{2}}$$

e) $$\frac{1-e^{it}}{1-e^{-it}} = \frac{|z(t)|\, e^{i\alpha(t)}}{|z(t)|\, e^{-i\alpha(t)}} = \underline{e^{2i\alpha(t)}}, \quad t \neq 0$$

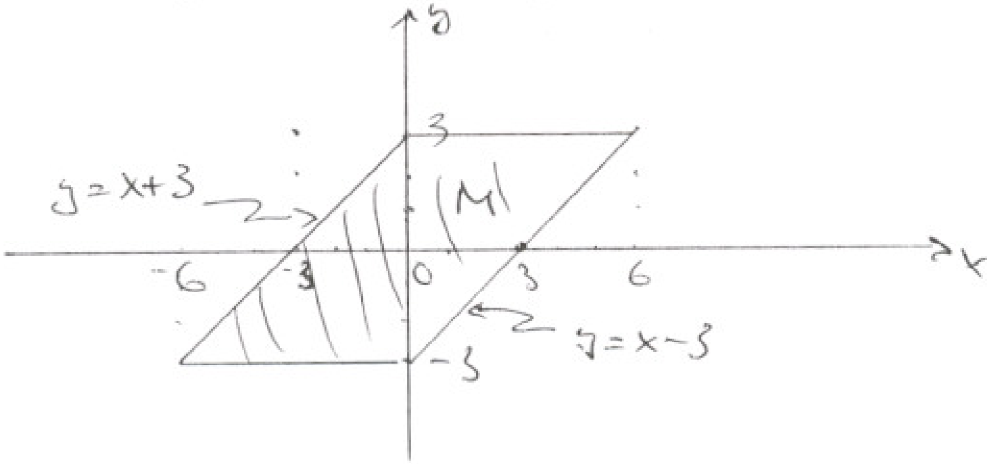
$$t=0: \frac{1-e^{it}}{1-e^{-it}} = \frac{1-(1+it+\frac{1}{2!}i^2t^2+\dots)}{1-(1-it+\frac{1}{2!}i^2t^2-+\dots)} \xrightarrow{t\to 0} \frac{-i}{i} = \underline{-1 = e^{2i\alpha(0)}}$$

$$\underline{= e^{\pm i\pi}}$$

VD HMI 26.9.2005

Aufgabe 3

a) M: $|y| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le y \le 3$ sieht das so aus



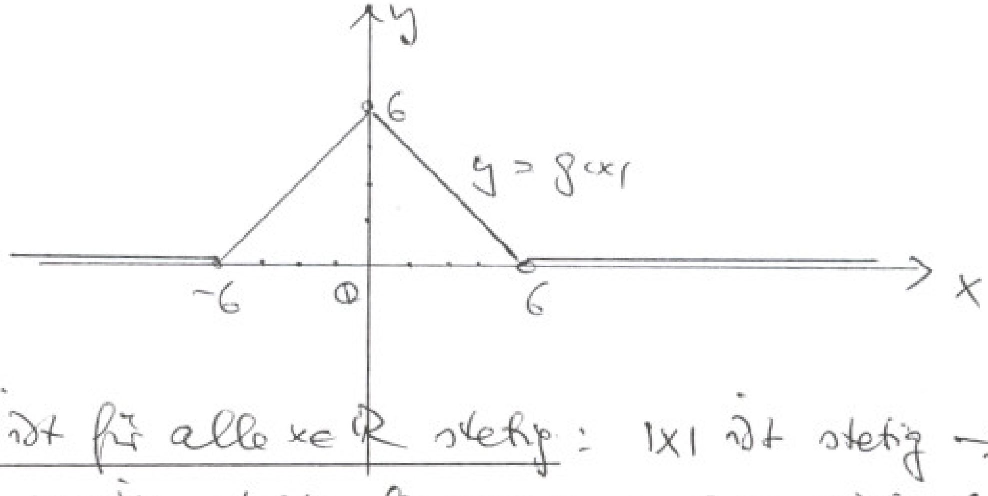
b) Der Integrand ist $\neq 0$ $(=1)$ genau für $(x,y) \in M$

(Skizze aus a)

$$g(x) = \begin{cases} 0 & |x| \ge 6 \\ \int_{y=-3}^{x+3} dy & , -6 \le x \le 0 \\ \int_{y=x-3}^{3} dy & , 0 \le x \le 6 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , |x| \ge 6 \\ x+6 & , -6 \le x \le 0 \\ -x+6 & , 0 \le x \le 6 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , |x| \ge 6 \\ 6-|x| & , |x| \le 6 \end{cases}$$

c)



g ist für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig: $|x|$ ist stetig $\rightarrow$ $6-|x|$ ist stetig für $|x| \le 6$, und es gilt $6-|\pm 6| = 0$ ✓

VD HMI 26. 9. 2005

Aufgabe 4

a) Nach Vorlesung (oder Bronstein) gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \underline{\text{genau für } -1 < x \leq 1.}$$

Für $|\beta x| < 1$ gilt (geometr. Reihe)

$$\alpha \frac{x}{1+\beta x} = \alpha x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n x^{n+1}$$

$$= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \beta^{n-1} x^n \qquad (*)$$

$$\rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \frac{1}{n} - \alpha \beta^{n-1} \right\} x^n$$

$\{\ldots\}$ soll verschwinden für möglichst viele n:

$n = 1$: $\underline{\alpha = 1}$, $n = 2$: $\underline{\frac{1}{2} = \alpha\beta = \beta}$

b) Aus a) liest man ab:

$$\underline{f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) x^n} \qquad (**)$$

c) $r = \min(r_1, r_2)$ $\quad r_1 = 1$ vom ln-Anteil

$r_2 = 2$, von $(*)$: $|\beta x| < 1$ mit $\beta = \frac{1}{2}$

Also $\underline{r = 1}$.

<u>Konvergenz liegt nur für x mit $-1 < x \leq 1$ vor</u>
(Vorlesung).

Aus $f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ und $(**)$ folgt:

$$\underline{f^{(221)}(0) = (221)! \left(\frac{1}{221} - \left(\frac{1}{2}\right)^{220} \right)}$$