VD HMI 25.9.06

Aufgabe 1

a)

Parameterdarstellung von E:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{s} \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{t} \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \tilde{s}, \tilde{t} \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also liegt D in der von A, B, C aufgespannten Ebene.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 10 > 0$$

Somit: HNF von E:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (x + y + z - 10) = 0$$

1b)

Der Abstand von P zu E ist

$$\left| \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + 1 + 1 - 10 \right) \right| = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

c)

Sei g die Gerade durch A, B und h die Gerade durch C, D. Dann ist

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$g \cap h$:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mu = 2, \quad \lambda = 8$$

Somit schneiden sich die beiden Geraden, und der Schnittpunkt ist $(2, 8, 0)$.

1d)

D liegt innerhalb des Dreiecks ABC.

Mögliche Begründung:

Es ist nach Teilaufgabe a):

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Wegen $\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \leq 1$ muss D innerhalb des Dreiecks ABC liegen.

Aufgabe 2

a)

$$z(z-4)(z^3-27) = 0$$

$$\Leftrightarrow [z=0] \vee [z=4] \vee [z^3 = 27]$$

$$\Leftrightarrow [z=0] \vee [z=4] \vee [z=3]$$

$$\vee \left[\begin{array}{l} z = 3e^{\frac{2}{3}\pi i} \\ \quad = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\, i \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{l} z = 3e^{\frac{4}{3}\pi i} \\ \quad = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\, i \end{array} \right]$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{3n} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} (\ln 3n - \ln n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 3n}{\ln n} = \ln 3$$

c) Es ist

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} \cosh y = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{\cosh(x+n)} = 1$$

Aufgabe 3

$$f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$$

a)

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4-x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Also $x = 0$ einzige Nullstelle

Extremstellen:

$$f(x) = \frac{x^2-4+4}{4-x^2} = -1 + \frac{4}{4-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x}{(4-x^2)^2} \overset{!}{=} 0$$

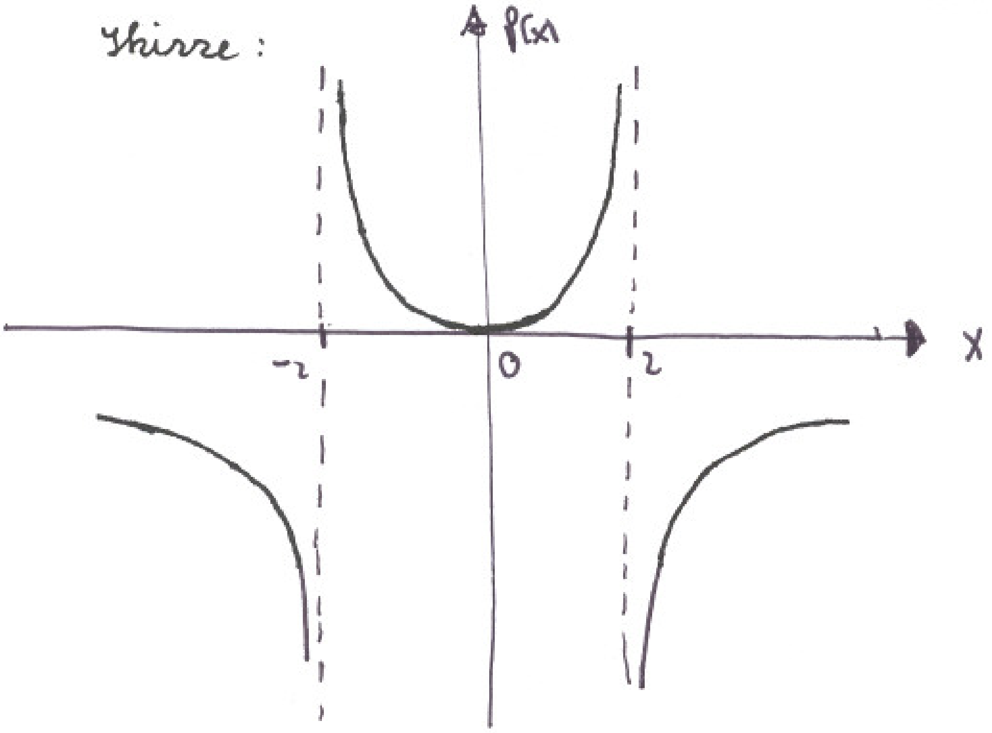
$\Rightarrow$ $x = 0$ einzige Extremstelle

Polstellen:

$4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Also: $x = \pm 2$ sind die Polstellen

Skizze:



3 b)

Partialbruchzerlegung liefert

$$-1 + \frac{4}{4-x^2} = -1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}$$

Somit

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 -1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} \quad dx$$

$$= \left[-x - \ln|2-x| + \ln|2+x| \right]_0^1$$

$$= -1 + \ln 2 + \ln 3 - \ln 2$$

$$= \ln 3 - 1$$

c)

$$\frac{x^2}{4-x^2} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} x^{2k} ,$$

falls $\left|\frac{x}{2}\right|^2 < 1$, also $|x| < 2$

Die gesuchte Taylorreihe ist $\sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} x^{2k}$

und hat den Konvergenzradius 2.

d)

Aus der Taylorreihe aus c) liest man ab:

$$f^{(100)}(0) = (100!)\, 4^{-50} .$$

Aufgabe 4

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^4}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{(1+x^4)\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{4x^3 \sin x + (1+x^4)\cos x}$$

$$= 2$$

In b) - d) verwenden wir:

(1) Den Hinweis auf dem Aufgabenblatt.

(2) Endlich viele Summanden haben keinen Einfluss auf das Konvergenzverhalten einer Reihe.

b)

Sei $b_n := \frac{1}{n^\alpha} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Wegen (1) gilt für alle $n \geq N_0$:

$0 < \frac{\gamma}{2} \frac{1}{n^\alpha} < b_n < 2\gamma \frac{1}{n^\alpha}$.

Außerdem gilt, dass die Reihe $r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, wobei $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, für alle $\alpha > 1$ konvergiert und für alle $0 \leq \alpha \leq 1$ divergiert.

Somit folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$

aufgrund des Majorantenkriteriums und wegen (2) für alle $\alpha > 1$ konvergiert und aufgrund des Divergentenkriteriums und wegen (2) für alle $0 \leq \alpha \leq 1$ divergiert.

c)

Sei $c_n := \frac{1}{n^\alpha} \inf_{j=1,\dots,n} \left| \frac{\arctan\left(\frac{1}{j^2}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{j}\right)} \right|$.

Wegen (1) und aufgrund der Definition des Infimums ist (c_n) für alle $\alpha > 0$ eine nicht negative, monoton fallende Nullfolge. Daher konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium die zu betrachtende Reihe für alle $\alpha > 0$.

Für $\alpha = 0$ ist wegen $\arctan y \neq 0$ für $y \neq 0$ und wegen (1) die Folge $((-1)^n c_n)$ keine Nullfolge, somit kann die zu betrachtende Reihe für $\alpha = 0$ nicht konvergieren.

4d)

Sei $d_n := \dfrac{\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Wegen (1) gilt für alle $n \geq N_0$:

$0 < \frac{\gamma}{2} < d_n < 2\gamma$.

Außerdem gilt, dass die Reihe $r \sum_{n=1}^{\infty} x^n$, wobei $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, genau dann konvergiert, wenn $|x| < 1$ ist.

Somit folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} x^n$ aufgrund des Majorantenkriteriums und wegen (2) für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert und aufgrund des Divergentenkriteriums und wegen (2) für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq 1$ divergiert.