Aufgabe 1 $\quad \dfrac{4^n}{n+1} < \dbinom{2n}{n}, \quad n \geq 2$

Induktionsanfang: $n=2$: $\dfrac{4^2}{3} = \dfrac{16}{3} < \dbinom{4}{2} = \dfrac{18}{3}$ ✓

Induktionsschluss $n \to n+1$

Ind.vor: Für ein $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gelte $\dfrac{4^n}{n+1} < \dbinom{2n}{n}$.

Ind.beh: Es gilt: $\dfrac{4^{n+1}}{n+2} < \dbinom{2n+2}{n+1}$

Bew: Man überlegt sich: $\dbinom{2n+2}{n+1} = 2\,\dfrac{2n+1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ **(*)**

$$\frac{4^{n+1}}{n+2} = \frac{4}{n+2}(n+1)\frac{4^n}{n+1} \overset{\text{Ind.vor}}{<} \frac{4(n+1)}{n+2}\binom{2n}{n}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{4(n+1)}{n+2}\,\frac{(n+1)}{2(2n+1)}\binom{2n+2}{n+1}$$

$$< \binom{2n+2}{n+1}$$

da $\dfrac{4(n+1)^2}{2(2n+1)(n+2)} < 1$ ist. Denn dies ist äquivalent zu $4(n+1)^2 < 2(2n+1)(n+2)$ und dies ~~zu~~ $4n < 5n$ ✓

Aufgabe 1

a) Setze $z = x + iy$ $\quad (x = \mathrm{Re}(z),\ y = \mathrm{Im}(z))$

in $\underline{z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0}$. Es ergibt sich:

$$x^2 - y^2 - 2x + 1 + i\,(2xy + 2y) = 0$$

$\longrightarrow$ (1) $\underline{x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0}$, (2) $\underline{2xy + 2y = 2y(1+x) = 0}$

(2) $\longrightarrow$ $y = 0$ oder $x = -1$

$y = 0$ in (1) $\longrightarrow$ $x = 1$ $\longrightarrow$ $\underline{\text{1. Lösung}}$: $\underline{z = x}$

$x = -1$ in (1): $4 - y^2 = 0 \rightarrow y = \pm 2$: $\underline{\text{2. Lösung}}$ / $\underline{\text{3. Lösung}}$: $\underline{z = -1 \pm 2i}$

b) Gesucht sind alle $z \in M_1 \cap M_2$ mit

$$M_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - \bar{z}| < 1 \} \quad \text{und}$$

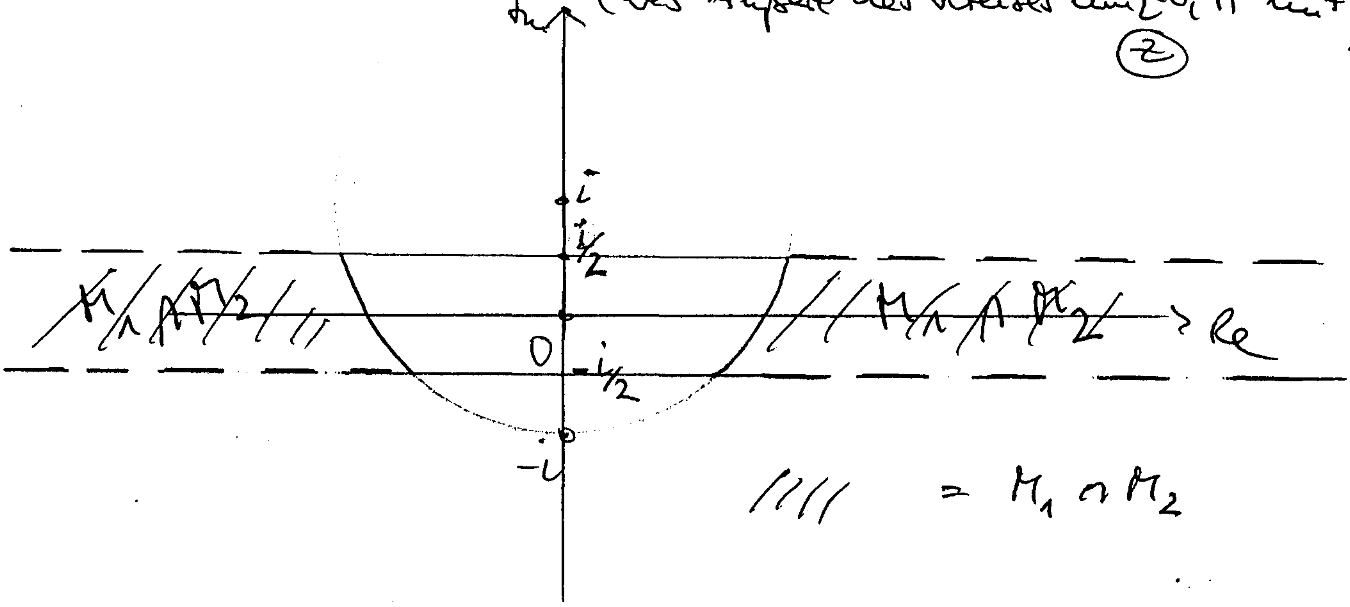
$$M_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \bar{z}(z - i) + iz \geq 3 \}$$

$\underline{z \in M_1} \Longleftrightarrow 2|\mathrm{Im}\, z| < 1 \Longleftrightarrow \underline{-\tfrac{1}{2} < \mathrm{Im}(z) < \tfrac{1}{2}}$

$\underline{z \in M_2} \Longleftrightarrow |z|^2 + iz - i\bar{z} = |z|^2 - 2\,\mathrm{Im}(z) \geq 3$

$\overset{x = \mathrm{Re}(z),\ y = \mathrm{Im}(z)}{\Longleftrightarrow}$ $\underline{x^2 + (y-1)^2 \geq 4}$

(Das Äußere des Kreises um $(0,1)$ [i] mit Radius 2)



Aufgabe 3

a) Es ist $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\sqrt{x}-1}} + \dfrac{1}{x^2}$.

Gesucht sind $F_1(x) = \int^x \dfrac{dt}{t^2} = \underline{-\dfrac{1}{x} + c_1}$ (c_1 Konstant)

und $F_2(x) = \int^x \dfrac{dt}{t\sqrt{\sqrt{t}-1}}$. Wir substituieren $t \to u$

mit $\underline{u = \varphi(t) = \sqrt{\sqrt{t}-1}} \to \sqrt{t} = u^2+1$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{\sqrt{t}-1}} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{(u^2+1)u}$$

$$dt = 4u(u^2+1)\,du$$

$$\to F_2(x) = \int^{\sqrt{\sqrt{x}-1}} 4\,\frac{u(u^2+1)}{u(u^2+1)^2}\,du = \underline{4\arctan\sqrt{\sqrt{x}-1} + c_2}$$

<u>Alle Stammfunktionen von f sind durch</u>

$\underline{F(x) = 4\arctan\sqrt{\sqrt{x}-1} - \dfrac{1}{x} + c}$ (c konst) gegeben

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ konvergiert (Vorlesung).

Für $n > 4$ gilt $\sqrt{n} - 1 > \frac{1}{2}\sqrt{n}$ und also gilt für $n > 4$

$$0 < \frac{1}{n\sqrt{\sqrt{n}-1}} < \frac{1}{n\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{n}}} = \sqrt{2}\,\frac{1}{n^{1+\frac{1}{4}}}.$$

Da $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{4}}}$ konvergiert (Vorlesung), ist nach dem Majorantenkriterium $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{\sqrt{n}-1}}$ konvergent. Somit

<u>konvergiert</u>

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\sqrt{n}-1}} = \underline{\sum_{n=2}^{\infty} f(n)}.$$

VD HMI Lösungen Sep 2007

Aufgabe 4

a) Das Integral ist an der unteren Grenze und wegen der oberen Grenze uneigentlich. Es sind unabhängig voneinander

z.B. $I_1 = \int_0^1 (x^3+x^5)^{-\frac{1}{4}}\,dx$ und $I_2 = \int_1^\infty (x^3+x^5)^{-\frac{1}{4}}\,dx$ zu untersuchen.

– Für $x>0$ hat man: $0 < \frac{1}{(x^3+x^5)^{1/4}} \le \frac{1}{x^{3/4}}$ und da $\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/4}}$ existiert, existiert I_1 nach dem Majorantenkriterium.

– Für $x>0$, also für $x>1$ erst recht, gilt

$$0 < \frac{1}{(x^3+x^5)^{1/4}} \le \frac{1}{x^{5/4}}, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^{5/4}} \text{ ist konvergent},$$

somit ist I_2 konvergent, wieder nach dem Majorantenkriterium.

Die Existenz von I_1 und I_2 (unabhängig voneinander) bedeutet, dass $\int_0^\infty (x^3+x^5)^{-\frac{1}{4}}\,dx$ konvergent ist.

---

b) $I(t) := \frac{1}{t^3}\int_0^{\sin t} \arctan(x^2)\,dx$ ist für $t\to 0$ vom Typ $\left(\frac{0}{0}\right)$.

(L'Hospital) Es gilt $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{3t^2}\cos t\,\arctan(\sin^2 t) = \frac{1}{3}$ wegen

$\arctan(\sin^2 t) = \sin^2 t + o(t^5)$ $(t\to 0)$ (Hinweis) und

mit $\frac{\sin t}{t} \to 1$ und $\cos t \to 1$ für $t\to 0$.

Mit der Regel von de L'Hospital hat man also:

$$\lim_{t\to 0} I(t) = \frac{1}{3}.$$