Aufgabe 1

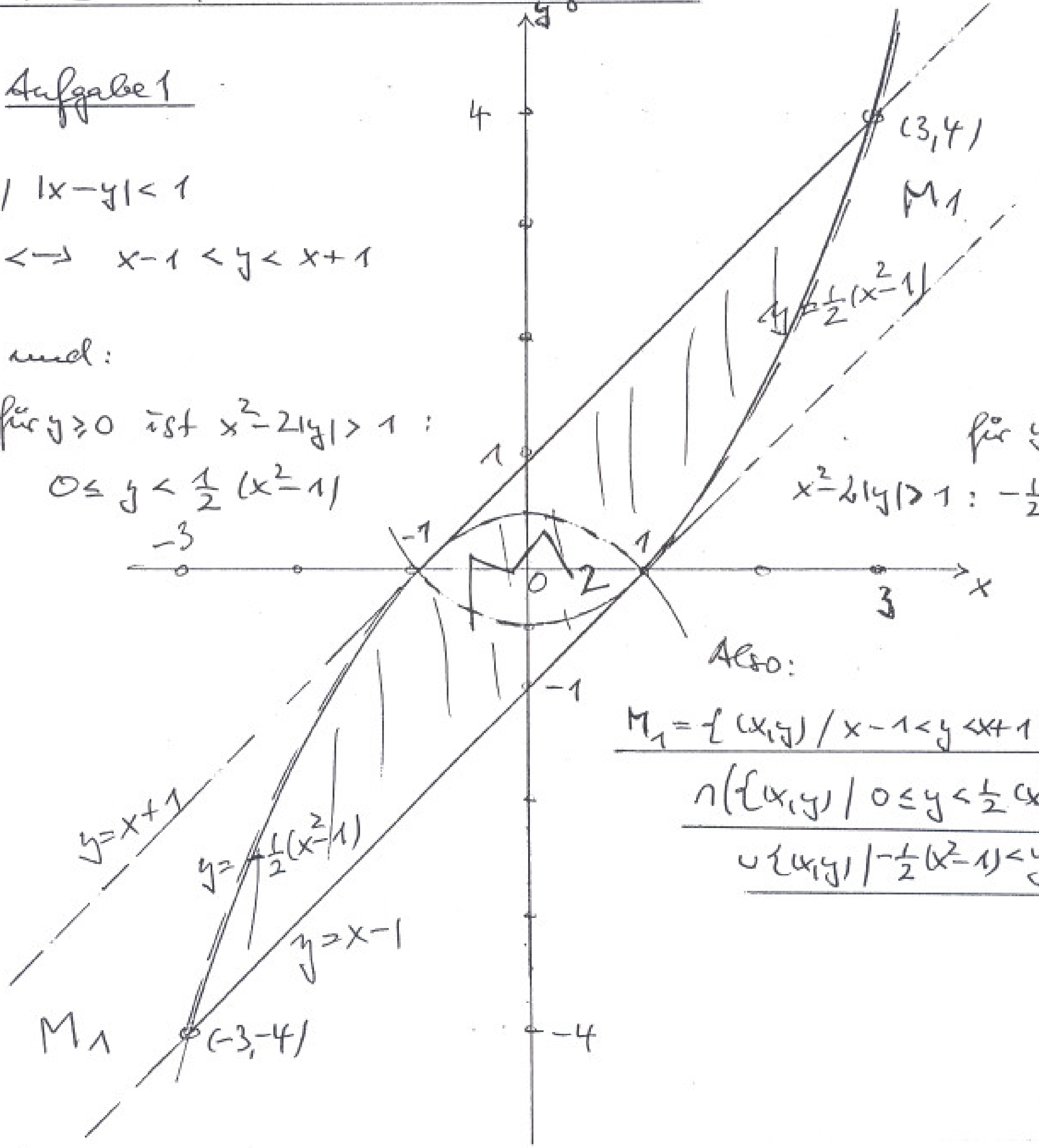
a) $|x-y|<1$

$\iff x-1<y<x+1$

und:

für $y \geq 0$ ist $x^2-2|y|>1$:

$0 \leq y < \frac{1}{2}(x^2-1)$



für $y \leq 0$ ist $x^2-2|y|>1$: $-\frac{1}{2}(x^2-1)<y\leq 0$.

Also:

$$M_1=\{(x,y)\,/\,x-1<y<x+1\} \cap \left(\{(x,y)\,|\,0\leq y<\tfrac{1}{2}(x^2-1)\} \cup \{(x,y)\,|\,-\tfrac{1}{2}(x^2-1)<y\leq 0\}\right)$$

Zu M_2: $x^2-2|y|<1$ bedeutet für

$y \geq 0$: $y>\frac{1}{2}(x^2-1)$ und $y \geq 0$ und für

$y \leq 0$: $y<-\frac{1}{2}(x^2-1)$ und $y \leq 0$

also: $$M_2=\left(\{(x,y)\,/\,y\geq 0 \text{ und } y>\tfrac{1}{2}(x^2-1)\} \cup \{(x,y)\,/\,y\leq 0 \text{ und } y<-\tfrac{1}{2}(x^2-1)\}\right) \cap \{(x,y)\,|\,x-1<y<x+1\}$$

Es ist $M_2=\{(x,y)\,|\,x-1<y<x+1\} \setminus \overline{M_1}$.

HM I H 2008 Lösungen

Aufgabe 1

a) $|x-y|<1$

$\Longleftrightarrow \quad x-1<y<x+1$

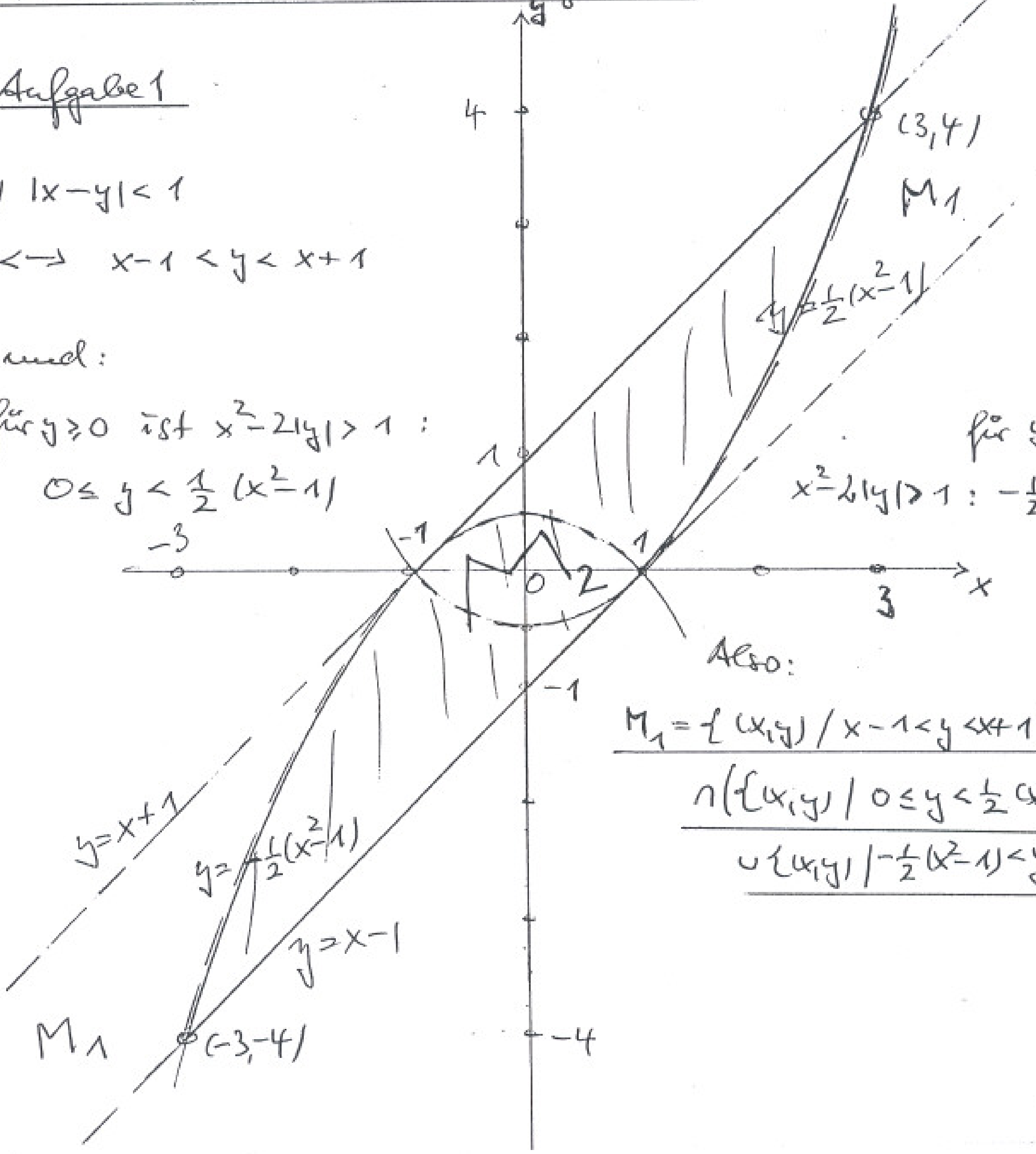
und:

für $y \geq 0$ ist $x^2-2|y|>1$:

$0 \leq y < \frac{1}{2}(x^2-1)$

für $y \leq 0$ ist

$x^2-2|y|>1$: $-\frac{1}{2}(x^2-1)<y\leq 0$.



Also:

$M_1=\{(x,y)\,/\,x-1<y<x+1\}$

$\cap\big(\{(x,y)\,/\,0\leq y<\frac{1}{2}(x^2-1)\}$

$\cup\{(x,y)\,/\,-\frac{1}{2}(x^2-1)<y\leq 0\}\big)$

zu M_2: $x^2-2|y|<1$ bedeutet für

$y\geq 0$: $y>\frac{1}{2}(x^2-1)$ und $y\geq 0$ und für

$y\leq 0$: $y<-\frac{1}{2}(x^2-1)$ und $y\leq 0$

also: $M_2=\big(\{(x,y)\,/\,y\geq 0$ und $y>\frac{1}{2}(x^2-1)\}$

$\cup\{(x,y)\,/\,y\leq 0$ und $y<-\frac{1}{2}(x^2-1)\}\big)$

$\cap\{(x,y)\,/\,x-1<y<x+1\}$

Es ist $M_2=\{(x,y)\,/\,x-1<y<x+1\}\setminus\overline{M_1}$.

I, 2 a) (i) $\sqrt[n]{\left|\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(n)\right)^n\right|} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(n) \to 0$

Damit gilt $\limsup \sqrt[n]{|(\ldots)^n|} = 0 < 1$

$\sqrt{\cdot}$-Krit $\Rightarrow$ die Reihe Konvergiert.

(ii) $\cosh(n) = \frac{1}{2}(e^n + e^{-n}) \overset{n\geq 0}{\leq} \frac{1}{2}(e^n + e^n) = e^n$

$\dfrac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}} = \frac{e}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ Quot.-Krit $\to$ die Reihe $\sum \frac{e^n}{n!}$ Konv

Maj.-Krit $\to$ $\sum \frac{\cosh(n)}{n!}$ Konvergiert

(iii) Für $n \geq 3$ ist $\ln(n) > 1$ $\to$ $\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}$ für $n \geq 3$.

$\sum \frac{1}{n}$ div (bekannt). Min-Krit $\to$ $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ divergiert.

b) (i) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(\underbrace{\tfrac{x}{n^2}}_{\to 0}) \xrightarrow{\sin \text{ stetig}} \sin(0) = 0$.

$\to (f_n)$ Konv. punktweise gegen $0 =: f(x)$

$\|f_n - f\|_\infty \geq \left|f_n\left(\frac{\frac{\pi}{2}n^2}{n^2}\right) - f\left(\frac{\frac{\pi}{2}n^2}{n^2}\right)\right| = |1-0| \not\to 0$

$\to (f_n)$ Konv. nicht glm.

(ii) mit (f_n) Konv. auch (g_n) punktweise gegen 0 (a.f $[9,22]$)

$|g_n(x)| = \left|\sin\left(\frac{x}{n^2}\right)\right| \leq \left|\frac{x}{n^2}\right| \leq \left|\frac{22}{n^2}\right|$

damit gilt auch $\|g_n - g\|_\infty \overset{g=0}{=} \|g_n\|_\infty \leq \frac{22}{n^2} \to 0$.

Also konv. (g_n) gleichmäßig.

Aufgabe 3

a) $x \geq 1$, damit $\sqrt{x-1}$ definiert ist, und $x \neq 2$, damit der Nenner $\neq 0$ ist. Also

$$\underline{D(f) = \{x \mid 1 \leq x < 2\} \cup \{x \mid x > 2\}}$$

b) $$F(u) = \int^{u} \frac{dx}{x(1-\sqrt{x-1})}$$

Substituiere:

$x \to t := \sqrt{x-1}$

$x = t^2 + 1, \quad dx = 2t\,dt$

$$= \int^{\sqrt{u-1}} \frac{2t\,dt}{(1+t^2)(1-t)}$$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{2t}{(1+t^2)(1-t)} = \dfrac{At+B}{1+t^2} + \dfrac{C}{1-t}$

$\to$ mit $\dfrac{2t}{1+t^2} = \dfrac{At+B}{1+t^2}(1-t) + C$

wenn man hier $t=1$, $t=0$ setzt und $t \to \infty$ bildet:

$C = 1, \quad 0 = B + C, \quad 0 = -A + C$

also: $C = 1, \; B = -1, \; A = 1$

$$\to F(u) = \int^{\sqrt{u-1}} \left(\frac{t-1}{1+t^2} + \frac{1}{1-t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \Big|^{\sqrt{u-1}} - \arctan t \Big|^{\sqrt{u-1}} - \ln(1-\sqrt{u-1})$$

$$= \underline{\frac{1}{2} \ln u - \arctan\sqrt{u-1} - \ln(1-\sqrt{u-1})} \qquad (*)$$

<u>Alle Stammfunktionen erhält man durch $F(u) + \text{const}$ mit einer beliebigen Konstanten const.</u>

c) Für F aus $(*)$ gilt $\underline{F(1) = 0}$.

I, 4 a) · auf $(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$ ist f stetig (Komposition stetiger Fkt'en)

· in 0: $\lim\limits_{x\to 0^-} |f(x)| = |x^2|\,|\sin\frac{1}{x}| \leq |x^2 \cdot \frac{1}{x}| = |x| \to 0$

Damit: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, also f stetig in 0

· in 1: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x} \overset{\text{l'hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2} \neq f(1)$

Damit ist f in 1 nicht stetig.

b) $f\left(-\frac{1}{\frac{3}{2}\pi}\right) = \frac{4}{9\pi^2} \cdot \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{4}{9\pi^2} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} > \frac{1}{2008}$

$f(0) = 0 < \frac{1}{2008}$, f stetig auf $(-1,1)$

Zwischenwertsatz $\to$ Behauptung.

c) · auf $(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$ ✓

· in 1 nicht diff'bar da nicht mal stetig.

· in 0: $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$. Damit ist f in 0 genau dann

diff'bar wenn gilt $0 \overset{!}{=} \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h}\sin\left(\frac{1}{h}\right)$

$= \lim\limits_{h\to 0^-} \underbrace{h}_{\to 0} \underbrace{\sin\frac{1}{h}}_{\text{beschr.}} = 0$ ✓ also f diff'bar in 0.
(mit $f'(0)=0$)

d) Setzen wir f auf $(-2,-1]$ fort durch $f(x) := x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, so ist f in -1 stetig fort durch $f(-1) := -\sin 1$, so ex. nach dem MWS ein $x \in (-1,0)$:

$f'(x) = \frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} = \frac{0-(-\sin 1)}{1} = \sin 1$.

e) · auf $(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$ ✓

· in 1 nicht ✓

· in 0: auf $(-1,0)$ gilt $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x} = -\cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}$

Für $x_n := \frac{1}{2\pi n}$ ist $f'(x_n) = 1 \overset{(n\to\infty)}{\not\to} 0 = f'(0)$. Also ist f in 0 nicht stetig diff'bar.

f) f ist stückweise stetig und beschränkt, also Int'bar. Auf $(0,1)$ ist $f \geq 0$. Auf $(1,2)$ ist $f > 0$, stetig

Auf $(-1,0)$ ist $f(x) \geq x^2 \cdot (-1) = -x^2$. Damit: $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx > \int_{-1}^{0} -x^2\,dx + \int_{0}^{2} 0\,dx = -\frac{1}{3}$.