UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Herbst 2009
22.09.2009

Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$a_n = \frac{(2\sqrt{n}+3)^2}{(3\sqrt[3]{n}+2)^3}.$$

Prüfen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ konvergent ist, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3i)^{n+1}}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Reihenwert sowie den Betrag des Reihenwertes.

c) Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{\sin^2(x)}$;

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} e^x \ln(\tan(e^x))$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-\frac{1}{n})^n(n+1)}{2n^3}\, x^n$$

und bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen diese Potenzreihe konvergiert.

b) Bestimmen Sie diejenigen $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, für welche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\Big(\frac{x}{x+1}\Big)^n$$

konvergiert, und berechnen Sie für diese x den Wert der Reihe.

Hinweis: Sie können $y = \frac{x}{x+1}$ setzen.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 x\, e^{2x^2} \sin(e^{x^2})\, dx.$$

b) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$$

auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls seinen Wert.

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \sqrt{n}\, \sin\left(\frac{x}{n}\right), \qquad x \in [0,1].$$

(i) Berechnen Sie $\int_0^1 f_n(x)\, dx$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Konvergiert die Folge $\left(\int_0^1 f_n(x)\, dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$? Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0,1]$? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Für jedes $b \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $M_b \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$M_b = \begin{pmatrix} 3 & 0 & b \\ 1 & b+1 & 1 \\ b & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Sei $b = 3$. Bestimmen Sie eine Basis von Kern M_3 und eine Basis von Bild M_3.

b) Sei $b = 3$ und $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^3$. Die lineare Abbildung $\phi\colon V \to W$ besitze bezüglich der Standardbasen in V und W die Darstellungsmatrix M_3. Gegeben seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass durch v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ gegeben ist, und berechnen Sie die Darstellungsmatrix von ϕ, wenn in V und W jeweils die Basis v_1, v_2, v_3 genommen wird.

c) Bestimmen Sie die Menge S aller $b \in \mathbb{R}$, für die M_b regulär ist, und berechnen Sie $(M_b)^{-1}$ für jedes $b \in S$.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Dienstag, den 13.10.2009, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 21.10.2009, von 14:00 Uhr bis 16:00 Uhr im HS 93 (Gebäude 10.81) statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 26.10.2009 bis 30.10.2009 im Allianz-Gebäude 05.20.