Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Herbst 2010
21.09.2010

Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) i) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geqslant 2$ gilt

$$\frac{(\sqrt{k}+1)^2}{k^2+\sqrt{k^4-1}} \geqslant \frac{(\sqrt{k}\,)^2}{k^2+\sqrt{k^4}} = \frac{k}{k^2+k^2} = \frac{1}{2k} \geqslant 0\,.$$

Da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, ist auch $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k}$ divergent. Somit liefert das Minorantenkriterium die Divergenz von $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\sqrt{k}+1)^2}{k^2+\sqrt{k^4-1}}$.

ii) Ist $a_n = \frac{2^n\,n!}{n^n}$ gesetzt, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{2^n\,n!}\right| = 2\,\frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= 2\,\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{e} < 1\,.$$

Daher liefert das Quotientenkriterium die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b)

A1 b)

$$f(x) = x e^{-x} = (x-1+1)\, e^{-(x-1)-1}$$

$$= \frac{1}{e}\,(1+(x-1)) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}\,(x-1)^k$$

$$= \frac{1}{e}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}\,(x-1)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}\,(x-1)^{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{e}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}\,(x-1)^k + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(k-1)!}\,(x-1)^k\right)$$

$$= \frac{1}{e}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^k\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k-1)!}\right)\right](x-1)^k\right)$$

$$= \frac{1}{e} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,(x-1)^k$$

mit $a_k = \frac{1}{e}\,(-1)^k\,\frac{1-k}{k!} = \frac{1}{k!}\,f^{(k)}(1) \quad (k=1,2,\ldots)$

Also: $f^{(200)}(1) = \frac{200!}{e}\;\frac{-199}{200!} = -\frac{199}{e}$

Aufgabe 2

a) **i)** Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\arctan x} - \cos^2 x$. Nach der Kettenregel ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\, e^{\arctan x} + 2\cos x\, \sin x\,.$$

Aufgrund von $f(0) = 0$ ergibt sich für die Ableitung von f in 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan x} - \cos^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = e^{\arctan 0} = 1\,.$$

ii) Mit den Reihenentwicklungen von exp und cos hat man für jedes $x \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{e^{x^3} - 1}{x(1-\cos x)} &= \frac{(1 + x^3 + \frac{1}{2!}(x^3)^2 + \frac{1}{3!}(x^3)^3 + \ldots) - 1}{x(1 - (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + - \ldots))} = \frac{x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{3!}x^9 + \ldots}{\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4!}x^5 + \frac{1}{6!}x^7 - + \ldots} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3!}x^6 + \ldots}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4!}x^2 + \frac{1}{6!}x^4 - + \ldots}\end{aligned}$$

und hieraus folgt wegen der Stetigkeit von Potenzreihen

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3!}x^6 + \ldots}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4!}x^2 + \frac{1}{6!}x^4 - + \ldots} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\,.$$

b) **i)** Die Funktion f ist als Komposition auf $(0,\infty)$ differenzierbarer Funktionen auf $(0,\infty)$ differenzierbar und es gilt für jedes $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, \ln x + \sqrt{x}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,(\ln x + 2)\,.$$

Für $x \geqslant \frac{1}{e}$ erhält man wegen der Monotonie des Logarithmus $\ln x \geqslant \ln\frac{1}{e} = -1$, was auf $\ln x + 2 \geqslant 1 > 0$ für alle $x \geqslant \frac{1}{e}$ führt. Es folgt $f'(x) > 0$ für alle $x \geqslant \frac{1}{e}$. Deshalb ist f auf $[\frac{1}{e}, \infty)$ streng monoton wachsend.
Insbesondere gilt für jedes $x \in [\frac{1}{e}, e^2]$

$$f(x) \geqslant f(\tfrac{1}{e}) = -\tfrac{1}{\sqrt{e}} \qquad \text{und} \qquad f(x) \leqslant f(e^2) = 2e\,. \tag{$*$}$$

Hiermit ist die Inklusion $f([\frac{1}{e}, e^2]) \subset [-\frac{1}{\sqrt{e}}, 2e]$ gezeigt. Sei andererseits $y \in [-\frac{1}{\sqrt{e}}, 2e]$. Wegen $(*)$ gilt dann $f(\frac{1}{e}) \leqslant y \leqslant f(e^2)$. Da f überdies auf $[\frac{1}{e}, e^2]$ stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [\frac{1}{e}, e^2]$ mit $f(x) = y$. Damit ist auch die andere Inklusion $[-\frac{1}{\sqrt{e}}, 2e] \subset f([\frac{1}{e}, e^2])$ bewiesen. Zusammen ergibt sich $f([\frac{1}{e}, e^2]) = [-\frac{1}{\sqrt{e}}, 2e]$.

Alternative Begründung: Die Funktion $f\colon [\frac{1}{e}, e^2] \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend. Nach einem Resultat der Vorlesung ist dann $f\colon [\frac{1}{e}, e^2] \to [f(\frac{1}{e}), f(e^2)]$ bijektiv, also gilt insbesondere $f([\frac{1}{e}, e^2]) = [f(\frac{1}{e}), f(e^2)] = [-\frac{1}{\sqrt{e}}, 2e]$.

ii) Wegen $f(e) = \sqrt{e}$ ist $f^{-1}(\sqrt{e}) = e$. Wie im Teil i) gesehen, ist $f\colon [\frac{1}{e}, e^2] \to [-\frac{1}{\sqrt{e}}, 2e]$ stetig, bijektiv und in e differenzierbar mit $f'(e) = \frac{3}{2\sqrt{e}} \neq 0$. Nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion ist f^{-1} im Punkt $\sqrt{e} = f(e)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(\sqrt{e}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\sqrt{e}))} = \frac{1}{f'(e)} = \frac{2\sqrt{e}}{3}\,.$$

Lösungen HM I

A4 a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = I$

Substituiere $t \to x = \cos t$: $\displaystyle I = -\int_1^{\frac12\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}\Big|_1^{\frac12\sqrt{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})$$

b) Mit $f(x) = \cos x + \sin x > 0$ auf $[0, \frac{\pi}{4}]$ gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\sqrt{2}$$

c) $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(x)}\,dx = I$

$$1+\cos(x) = 1+\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

$$= 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$\sqrt{1+\cos(x)} = \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| = -\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} \quad \text{für } \pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$$

$$I = -\sqrt{2}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}\,dx = -\sqrt{2}\,2\sin\frac{x}{2}\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= 2(\sqrt{2}-1)$$

HM I Physik Lösungen

44 $\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^x, \; x \in \mathbb{R} & (1) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

Lösungsvorgehen nach Vorlesung: Es gilt

y genügt (1) $\iff$ für v mit $v(x) = e^{2x} y(x)$ (2)
gilt $v''(x) = e^{3x}$

Aus $v''(x) = e^{3x}$ folgt $v(x) = \frac{1}{9} e^{3x} + c_1 x + c_2$

und mit (2) erhält man $\underline{y(x) = \frac{1}{9} e^x + c_1 x e^{-2x} + c_2 e^{-2x}}$
mit beliebigen Konstanten c_1, c_2.

c_1, c_2 werden so berechnet, dass $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ erfüllt sind:

$$y(0) = 1 = \frac{1}{9} + c_2$$

$$y'(0) = 0 = \frac{1}{9} + c_1 - 2c_2$$

$\Rightarrow$ $c_1 = \frac{5}{3}$, $c_2 = \frac{8}{9}$ und also die Lösung des vorgelegten Problems: $\underline{y(x) = \frac{1}{9} e^x + \frac{5}{3} x e^{-2x} + \frac{8}{9} e^{-2x}}$