Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Herbst 2011
21.09.2011

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 $\quad$ ($\mathbf{3+4+3=10}$ Punkte)

a) Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge

$$\left\{\, z^2 \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } |z| < 3 \text{ und } \arg(z) \in (0, \tfrac{3}{4}\pi) \,\right\}.$$

b) Bestimmen Sie Betrag und Argument aller $z \in \mathbb{C}$, die der Gleichung

$$\big(z\,|z|\big)^2 = 8i\,\overline{z}$$

genügen.

c) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von $e^{(e^{it})}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 $\quad$ ($\mathbf{6+4=10}$ Punkte)

a) Ermitteln Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) \frac{x^k}{k}$$

konvergiert.

b) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{-\tfrac{1}{5}\} \to \mathbb{C}\,, \quad f(z) := \frac{1}{1+5z}$$

um die Entwicklungsstelle $z_0 = 2$, geben Sie den zugehörigen Konvergenzradius an und berechnen Sie $f^{(9)}(2)$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 $\quad$ (2 + 4 + 4 = 10 Punkte)

$f_1, f_2, \ldots$ seien auf $[0,2]$ definierte Funktionen, die wie folgt gegeben sind:

$$f_1(x) := 1\,, \qquad f_{n+1}(x) := \frac{x f_n(x)}{1 + f_n(x)} \qquad (x \in [0,2],\, n \in \mathbb{N})\,.$$

a) Begründen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: f_n ist auf $(0,2)$ stetig differenzierbar mit $f_n'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in (0,2)$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^n}{2 + \sum_{k=1}^{n-1} x^k} \qquad (x \in [0,2])$$

gilt.

c) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für jedes $x \in [0,2]$.

Aufgabe 4 $\quad$ (8 + 2 = 10 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \max\{3^{-x}, 3^x\}\, dx$

ii) $\displaystyle\int_{1}^{8} \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}}\, dx$

iii) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x \cos(x)\, dx$

b) Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $A, B \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\int_a^b x f''(x)\, dx = aA + bB + f(a) - f(b)$$

erfüllt ist.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Mittwoch, den 12.10.2011, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Donnerstag, den 20.10.2011, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Benz-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 24.10.2011 bis 28.10.2011 im Allianz-Gebäude 05.20.