Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Herbst 2011
21.09.2011

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

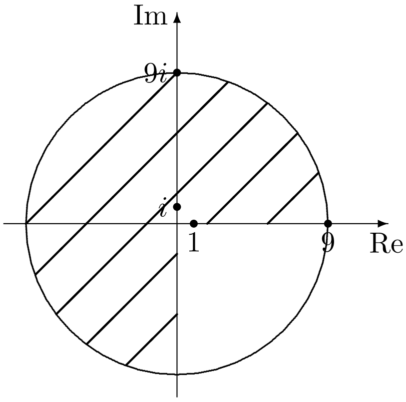
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\big\{z^2 \mid z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \text{ mit } |z| < 3 \text{ und } \arg(z) \in (0, \tfrac{3}{4}\pi)\big\} \\
&= \big\{z^2 \mid z = re^{i\phi} \text{ für ein } r \in (0,3) \text{ und } \phi \in (0, \tfrac{3}{4}\pi)\big\} \\
&= \big\{r^2 e^{2i\phi} \mid r \in (0,3) \text{ und } \phi \in (0, \tfrac{3}{4}\pi)\big\} \\
&= \big\{\rho e^{i\theta} \mid \rho \in (0,9) \text{ und } \theta \in (0, \tfrac{3}{2}\pi)\big\} \\
&= \big\{w \in \mathbb{C} \mid |w| \in (0,9) \text{ und } (\operatorname{Re} w < 0 \text{ oder } \operatorname{Im} w > 0)\big\}\,.
\end{aligned}$$

Also ist die gesuchte Menge die offene Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius 9 ohne den vierten Quadranten, ohne die positive reelle Achse, ohne die negative imaginäre Achse und ohne den Ursprung. Skizze:



b) Für $z = 0$ ist die Gleichung erfüllt. Für $z \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\big(z\,|z|\big)^2 = 8i\,\overline{z} \quad &\Longleftrightarrow \quad z^2 z\overline{z} = 8i\,\overline{z} \quad \Longleftrightarrow \quad z^3 = 8i \\
&\Longleftrightarrow \quad z = 2e^{i\frac{1}{6}\pi} \text{ oder } z = 2e^{i\frac{5}{6}\pi} \text{ oder } z = 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = -2i \\
&\Longleftrightarrow \quad |z| = 2 \text{ und } \arg(z) \in \{\tfrac{1}{6}\pi, \tfrac{5}{6}\pi, \tfrac{3}{2}\pi\}\,.
\end{aligned}$$

c) Wegen

$$e^{(e^{it})} = e^{\cos(t)+i\sin(t)} = e^{\cos(t)}e^{i\sin(t)} = e^{\cos(t)}\big(\cos(\sin t) + i\sin(\sin t)\big)$$

ergibt sich für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Re} e^{(e^{it})} = e^{\cos(t)}\cos(\sin t) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} e^{(e^{it})} = e^{\cos(t)}\sin(\sin t)\,.$$

Aufgabe 2

a) Setze $a_k := (\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k})\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{\frac{3^k+2^k}{2^k\,3^k}\ \frac{1}{k}}{\frac{3^{k+1}+2^{k+1}}{2^{k+1}\,3^{k+1}}\ \frac{1}{k+1}} = 6\,\frac{3^k+2^k}{3^{k+1}+2^{k+1}}\,\frac{k+1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 6\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = 2\,,$$

denn

$$\frac{3^k+2^k}{3^{k+1}+2^{k+1}} = \frac{1+(2/3)^k}{3+2\cdot(2/3)^k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1+0}{3+2\cdot 0} = \frac{1}{3}$$

und

$$\frac{k+1}{k} = \frac{1+1/k}{1} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1+0}{1} = 1\,.$$

Wegen $\lim_{k\to\infty}|\frac{a_k}{a_{k+1}}| = 2$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ gleich 2. Demzufolge konvergiert die Reihe absolut für $|x| < 2$ und divergiert für $|x| > 2$.

Für $x = 2$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^k$ divergent, weil diese Reihe wegen $a_k 2^k = (1 + (\frac{2}{3})^k)\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{k} > 0$, $k \in \mathbb{N}$, die divergente Minorante $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ hat.

Im Fall $x = -2$ schreibe $a_k(-2)^k = (-1)^k c_k$ mit $c_k := (1 + (\frac{2}{3})^k)\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine nichtnegative Nullfolge, die wegen $c_{k+1} = (1 + (\frac{2}{3})^{k+1})\frac{1}{k+1} \leqslant (1 + (\frac{2}{3})^k)\frac{1}{k} = c_k$, $k \in \mathbb{N}$, monoton fallend ist. Damit sind die Voraussetzungen des Leibnizkriteriums erfüllt, welches die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k c_k$ garantiert.

Fazit: Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert genau für $x \in [-2, 2)$.

b) Mit Hilfe der geometrischen Reihe erhält man für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|\frac{5}{11}(z-2)| < 1$

$$\frac{1}{1+5z} = \frac{1}{11+5(z-2)} = \frac{1}{11}\frac{1}{1+\frac{5}{11}(z-2)} = \frac{1}{11}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{11}(z-2)\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 5^k}{11^{k+1}}(z-2)^k\,.$$

Da diese Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| < \frac{11}{5}$ konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| > \frac{11}{5}$ divergiert, beträgt ihr Konvergenzradius $\frac{11}{5}$. Außerdem ist $f^{(9)}(2) = \frac{-5^9}{11^{10}}\,9!$.

Aufgabe 3

A3a) $f_1(x) > 0$, $0 \le x \le 2$.

$f_n(x) \geq 0$, $0 \le x \le 2$ $\Longrightarrow$ (mit der Rekursionsformel) $f_{n+1}(x) \geq 0$, $0 \le x \le 2$

Somit gilt $f_n(x) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \le x \le 2$. (Induktion)

Also: f_n ist durch die Rekursionsformel für alle $n \in \mathbb{N}$ wohldefiniert.

Es ist $f_1 \in C^1[0,2]$. Aus $f_n \in C^1[0,2]$ folgt (Produkt-, Quotientenregel) $f_{n+1} \in C^1[0,2]$. Mit Induktion also $f_n \in C^1[0,2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit der Rekursionsformel rechnet man nach:

$$f_{n+1}'(x) = \frac{f_n(x) + x f_n'(x) + f_n^2(x)}{(1+f_n(x))^2},$$

woraus induktiv (mit $f_n \geq 0$ und $f_n' \geq 0$)

folgt: $f_n'(x) \geq 0$, $0 < x < 2$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Induktionsanfang: $\underline{n=2}$ (mit $f_2(x)=2$)

$$f_3(x) = \frac{\frac{x^2}{2}}{1+\frac{x}{2}} = \frac{x^2}{2+x}$$

<u>Induktionsschluss</u>: $\underline{n \to n+1}$

$$f_{n+1}(x) = \frac{x \, \frac{x^{n-1}}{2+x+x^2+\cdots+x^{n-2}}}{1+\frac{x^{n-1}}{2+x+x^2+\cdots+x^{n-2}}} = \frac{x^n}{2+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$$

c) Für $x \neq 1$ gilt (geometrische Summe / b))

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^n}{1+\frac{1-x^n}{1-x}} = \frac{x^n(1-x)}{2-x-x^n}$$

$\Rightarrow$ Für $\underline{0<x<1}$ gilt: $x^n \to 0$ $(n\to\infty)$, also: $f_n(x) \to 0$ $(n\to\infty)$

Für $\underline{1<x\leq 2}$ gilt $x^n \to \infty$ $(n\to\infty)$, also $f_{n+1}(x) = \frac{1-x}{\frac{2-x}{x^n}-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} x-1$

Für $x=1$ bedeutet b): $f_{n+1}(1) = \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n\to\infty)$.

Ergebnis: $$\underline{\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0\leq x\leq 1 \\ x-1 & 1<x\leq 2 \end{cases}}$$

Aufgabe 4

a) **i)** Für jedes $x \in [-1,1]$ gilt

$$\max\{3^{-x},3^x\} = \begin{cases} 3^{-x} & \text{für } x<0, \\ 3^x & \text{für } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Somit folgt mit der Substitution $y=-x$, $dx=-dy$

$$\int_{-1}^{1} \max\{3^{-x},3^x\}\,dx = \int_{-1}^{0} 3^{-x}\,dx + \int_0^1 3^x\,dx = \int_0^1 3^y\,dy + \int_0^1 3^x\,dx$$
$$= 2\int_0^1 3^x\,dx = 2\Big[\frac{3^x}{\ln 3}\Big]_0^1 = \frac{4}{\ln 3}\,.$$

ii) Die Substitution $y=\sqrt[3]{x}$, $dx=3y^2dy$ führt auf

$$\int_1^8 \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_1^2 \frac{3y^2}{y^3+y}\,dy = \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{2y}{y^2+1}\,dy = \frac{3}{2}\left[\ln(y^2+1)\right]_1^2 = \frac{3}{2}(\ln 5-\ln 2)\,.$$

iii) Mit zweimaliger partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x \cos(x)\,dx &= \big[e^x \cos(x)\big]_{\pi/4}^{\pi/2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x \sin(x)\,dx \\ &= \big[e^x \cos(x) + e^x \sin(x)\big]_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x \cos(x)\,dx\end{aligned}$$

und somit

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x \cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\big[e^x \cos(x) + e^x \sin(x)\big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\big(e^{\pi/2} - \tfrac{2}{\sqrt{2}}\, e^{\pi/4}\big)\,.$$

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}\int_a^b x f''(x)\,dx &= \big[x f'(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,dx = b f'(b) - a f'(a) - \big[f(x)\big]_a^b \\ &= b f'(b) - a f'(a) - f(b) + f(a)\,.\end{aligned}$$

Somit leisten $A = -f'(a)$ und $B = f'(b)$ das Gewünschte.