Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Herbst 2012
19.09.2012

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 **($2+6+2=10$ Punkte)**

a) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2}$$

auf Konvergenz.

b) Berechnen Sie jeweils den Konvergenzradius der Potenzreihe und bestimmen Sie alle Punkte $x\in\mathbb{R}$, in denen die jeweilige Potenzreihe konvergiert:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$,

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x)^{2n}}{n}$.

c) Untersuchen Sie, ob folgender Grenzwert existiert, und berechnen Sie diesen gegebenenfalls:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\cos x}(e^{5x}-e^{-x}).$$

Aufgabe 2 **($5+5=10$ Punkte)**

a) **i)** Bestimmen Sie die Konstante $a\in\mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f\colon\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\qquad f(x):=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\log(\cos x) & \text{für } 0<|x|<\frac{\pi}{2},\\ a & \text{für } x=0,\end{cases}$$

auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ stetig ist.

ii) Es bezeichne a die in i) bestimmte Konstante. Geben Sie alle $x_0\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ an, in denen f differenzierbar ist, und bestimmen Sie in diesen Stellen $f'(x_0)$.

Hinweis: $\log=\ln$.

b) **i)** Begründen Sie, warum die Funktion $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ x\mapsto\tanh x$, auf $(0,\infty)$ streng monoton wachsend ist.

ii) Begründen Sie: Für $\log 2<x<y<\infty$ gilt

$$\tanh y-\tanh x<\frac{16}{25}(y-x).$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (2 + 3 + 5 = 10 Punkte)

a) Berechnen Sie den Wert des folgenden Integrals:

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx.$$

b) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx$$

konvergiert, und berechnen Sie den Wert des Integrals.

c) Gegeben sei die Abbildung

$$f : I \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x e^{-kx}.$$

i) Bestimmen Sie die Menge I aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x e^{-kx}$ konvergiert, und bestimmen Sie für alle $x \in I$ den Wert der Reihe.

ii) Konvergiert die Reihe auf $[0,1]$ gleichmäßig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (2 + 3 + 5 = 10 Punkte)

Im Vektorraum $C(\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $V := \operatorname{lin}\{\exp, \sin, \cos\}$.

a) Berechnen Sie den Rang der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ e^{\pi/2} & 1 & 0 \\ e^{\pi} & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Begründen Sie, dass $\exp, \sin, \cos$ eine Basis von V bilden.
Hinweis: Sie können dazu Aufgabenteil a) verwenden.

c) Es sei $b \in \mathbb{R}$. Durch $\phi : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$, $f \mapsto f(\,\cdot\, + b)$ wird eine lineare Abbildung definiert. (Dies muss nicht begründet werden.)

i) Zeigen Sie, dass ϕ von V nach V abbildet.

ii) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Basis $\exp, \sin, \cos$.

iii) Zeigen Sie, dass ϕ injektiv ist.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Dienstag, den 09.10.2012, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Donnerstag, den 18.10.2012, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Tulla-Hörsaal (Geb. 11.40) statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 22.10.2012 bis 26.10.2012 im Allianz-Gebäude 05.20.