Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Herbst 2012
Institut für Analysis 19.09.2012
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Wegen

$$\sqrt[n]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2}} = \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1/2}{n}\right)^{n} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-2}e^{1/2} = e^{-3/2} < 1$$

konvergiert die zu untersuchende Reihe nach dem Wurzelkriterium.

b) **i)** Wir setzen $a_n := \frac{1}{n+\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard berechnet sich der Konvergenzradius R der Potenzreihe durch

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+\sqrt{n}}}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[n]{n} \leqslant \sqrt[n]{n+\sqrt{n}} \leqslant \sqrt[n]{2n}$. Außerdem ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} = 1$. Durch Anwendung der Grenzwertsätze erhält man

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+\sqrt{n}}} = 1.$$

Die Potenzreihe konvergiert also für alle $x \in (-1,1)$.
Untersuchung der Randpunkte $x = 1$ und $x = -1$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{n+\sqrt{n}}$. Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergiert, divergiert nach dem Minorantenkriterium auch die gegebene Potenzreihe im Punkt $x = 1$. Andererseits ist $\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert somit die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$.
Insgesamt erhalten wir: Die gegebene Potenzreihe konvergiert genau für alle $x \in [-1,1)$.

ii) Wir betrachten zunächst für $y \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}$. Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1$. Im Punkt $y = 1$ divergiert die Reihe (harmonische Reihe), im Punkt $y = -1$ konvergiert die Reihe nach dem Leibnizkriterium. D.h. diese Potenzreihe konvergiert genau für alle $y \in [-1,1)$. Setzen wir nun $y = 9x^2$, so gilt einerseits $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{2n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(9x^2)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}$. Andererseits ist

$$y \in [-1,1) \iff 9x^2 \in [-1,1) \iff |x| < \frac{1}{3}.$$

D.h. der Konvergenzradius der gegebenen Potenzreihe ist $\frac{1}{3}$, und die Potenzreihe konvergiert genau für alle $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

c) Durch Potenzreihenentwicklung von cos und exp ergibt sich

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\cos x}(e^{5x}-e^{-x}) = \lim_{x\to 0} \frac{x((1+5x+\frac{(5x)^2}{2}+\ldots)-(1-x+\frac{x^2}{2}-\ldots))}{1-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\ldots)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(6x+12x^2+\ldots)}{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+\ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{6+12x+\ldots}{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+\ldots} = 12.$$

Aufgabe 2

a) **i)** Nach der Regel von de l'Hospital gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Somit ist f genau dann stetig, wenn $a = -\frac{1}{2}$ ist.

ii) Es sei $a = -\frac{1}{2}$. Für $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Die Ableitung in diesen Punkten ist gegeben durch

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}\log(\cos x) - \frac{1}{x^2}\tan x.$$

Ferner gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h^2}\log(\cos h)+\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(\cos h)+\frac{h^2}{2}}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{-\tan h + h}{3h^2}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{\cos^2 h}+1}{6h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\tan^2 h}{6h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{6}\cdot\frac{\tan h}{h}\cdot\tan h = 0.$$

Hieraus folgt, dass f auch in 0 differenzierbar ist mit $f'(0) = 0$.

b) **i)** Die Funktion f ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0, \quad x \in (0,\infty).$$

Folglich ist f auf $(0,\infty)$ streng monoton wachsend.

ii) Es sei $\log 2 < x < y < \infty$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$f(y) - f(x) = \tanh y - \tanh x = f'(\xi)(y-x).$$

Da cosh auf $(0,\infty)$ streng monoton wachsend ist, gilt für $\xi > \log 2$

$$f'(\xi) = \frac{1}{\cosh^2 \xi} < \frac{1}{\cosh^2(\log 2)} = \left(\left(\frac{1}{2}(e^{\log 2}+e^{-\log 2})\right)^2\right)^{-1} = \left(\frac{1}{4}\left(2+\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-1} = \frac{16}{25}.$$

Wegen $y > x$ folgt hieraus folgt die Ungleichung

$$\tanh y - \tanh x < \frac{16}{25}(y-x).$$

Aufgabe 3

a) Es gilt

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1+x^2+2x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 1 + \frac{\frac{d}{dx}(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$$
$$= \left[x + \log|1+x^2|\right]_0^1 = 1 + \log 2.$$

b) Es sei $R > 1$. Mit Hilfe von partieller Integration berechnet man

$$\int_1^R \frac{\log x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\log x}{x}\right]_1^R - \int_1^R \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\,dx = -\frac{\log R}{R} + 0 - \left[\frac{1}{x}\right]_1^R = -\frac{\log R}{R} - \frac{1}{R} + 1.$$

Es gilt $\lim\limits_{\mathbb{R}\to\infty} \frac{1}{R} = 0$ und, nach der Regel von de l'Hospital, $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{\log R}{R} = \lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R} = 0$. Hieraus folgt die Konvergenz des zu untersuchenden uneigentlichen Integrals. Der Wert des uneigentlichen Integrals beträgt

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\log x}{x^2}\,dx = 1.$$

c) **i)** Für $x = 0$ konvergiert die Reihe mit Reihenwert $f(0) = 0$. Für $x \neq 0$ gilt $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x e^{-kx} = x \sum\limits_{k=1}^{\infty} (e^{-x})^k$. Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y^k$ konvergiert genau für $|y| < 1$, der Wert der Reihe ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} y^k - 1 = \frac{1}{1-y} - 1 = \frac{y}{1-y}.$$

Substituiert man $y = e^{-x}$, so sieht man, dass die obige Reihe genau für $|e^{-x}| = e^{-x} < 1 \iff x > 0$ konvergiert. Für $x > 0$ gilt also $f(x) = x\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1}$. Somit ist $I = [0,\infty)$, und die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{x}{e^x-1} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

ii) Für $N \in \mathbb{N}$ setze $f_N(x) := \sum_{k=1}^N x e^{-kx}$, $x \in I$. In i) wurde gezeigt, dass $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ auf I punktweise gegen f konvergiert. Andererseits gilt jedoch für $N \in \mathbb{N}$ und $x > 0$

$$f(x) - f_N(x) = \frac{x}{e^x - 1} - x\left(\frac{1-(e^{-x})^{N+1}}{1-e^{-x}} - 1\right) = \frac{x}{e^x-1} - \frac{x(1-e^{-Nx})}{e^x-1} = \frac{xe^{-Nx}}{e^x-1};$$

d.h. setzt man $x_N := \frac{1}{N}$, so gilt

$$f(x_N) - f_N(x_N) = \frac{\frac{1}{N}e^{-1}}{e^{\frac{1}{N}} - 1} \;\to\; e^{-1}, \qquad N \to \infty.$$

Also ist $|f(x_N) - f_N(x_N)| \geqslant \frac{1}{2}e^{-1}$ für fast alle $N \in \mathbb{N}$. Wählt man $\varepsilon := \frac{1}{2}e^{-1}$, so existiert zu jedem $N_0 \in \mathbb{N}$ ein $N \geqslant N_0$ und ein $x \in [0,1]$ mit $|f(x) - f_N(x)| \geqslant \varepsilon$ (nämlich $x = x_N = \frac{1}{N}$). Hieraus folgt, dass $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 4

a) Mittels Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilennormalform; die Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2 und Z_3 bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ e^{\pi/2} & 1 & 0 \\ e^{\pi} & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - e^{\pi} Z_1]{Z_2 \to Z_2 - e^{\pi/2} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -e^{\pi/2} \\ 0 & 0 & -e^{\pi} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to (-e^{\pi}-1)^{-1} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -e^{\pi/2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In der Zeilennormalform von A gibt es drei nichtverschwindende Zeilen, also hat A Rang 3.

b) Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \exp + \beta \sin + \gamma \cos = 0$, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gelte

$$\alpha \exp(x) + \beta \sin(x) + \gamma \cos(x) = 0.$$

Setzt man $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \pi$ ein, so ergibt sich das lineare Gleichungssystem $A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$ mit A aus a). Da $\operatorname{rg} A = 3$ ist, ist $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die einzige Lösung des Gleichungssystems. Folglich sind $\exp, \sin, \cos$ linear unabhängig. Wegen $V = \operatorname{lin}\{\exp, \sin, \cos\}$ bilden sie eine Basis von V.

c) **i)** Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x + b) = e^{x+b} = e^x e^b$, und, aufgrund der Additionstheoreme, $\sin(x + b) = \sin(x)\cos(b) + \sin(b)\cos(x)$ und $\cos(x + b) = \cos(x)\cos(b) - \sin(x)\sin(b)$. Also ist

$$\begin{aligned} \phi(\exp) &= \exp(\,\cdot\, + b) &&= e^b \exp &&\in V, \\ \phi(\sin) &= \sin(\,\cdot\, + b) &&= \cos(b)\sin + \sin(b)\cos &&\in V, \\ \phi(\cos) &= \cos(\,\cdot\, + b) &&= \cos(b)\cos - \sin(b)\sin &&\in V. \end{aligned}$$

Da ϕ linear ist und $\exp, \sin, \cos$ eine Basis von V bilden, folgt hieraus, dass ϕ von V nach V abbildet.

ii) Aus i) lässt sich die Darstellungsmatrix B von ϕ bezüglich der Basis $\exp, \sin, \cos$ ablesen:

$$B := \begin{pmatrix} e^b & 0 & 0 \\ 0 & \cos(b) & -\sin(b) \\ 0 & \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}.$$

iii) Die lineare Abbildung ϕ ist genau dann injektiv, wenn $\det B \neq 0$ ist. Wegen $\det B = e^b(\cos^2(b) + \sin^2(b)) = e^b \neq 0$ für alle $b \in \mathbb{R}$, ist ϕ injektiv.