Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
20.09.2013

Klausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 ((4+3+3) Punkte)

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolgen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche nicht? Geben Sie für wahre Aussagen eine kurze Begründung, für falsche ein Gegenbeispiel.

i) Die Folge $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.
ii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent.
iii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|}$ ist konvergent.
iv) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ist konvergent.

b) Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ ein reelles Polynom, wobei $b_n = 1$ und n ungerade ist. Entscheiden Sie wieder, welche der folgenden Aussagen wahr und welche nicht wahr sind, und geben Sie für wahre Aussagen eine kurze Begründung, für falsche ein Gegenbeispiel.

i) P hat mindestens eine Nullstelle auf $\mathbb{R}$.
ii) Es gibt ein $y \in \mathbb{R}$ mit $P(y) = y$.
iii) Das Integral $\int_0^{\infty} e^{-P(x)}\,dx$ ist konvergent.

c) Bestimmen Sie sämtliche komplexe Lösungen der Gleichung $z^6 = 4\sqrt{2}(8 - 8\,i)$.

Lösung:

a) i) Die Aussage ist wahr: Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Damit ist $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und damit divergent.

ii) Die Aussage ist falsch: Sei $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. Da $\frac{1}{\sqrt{n}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Leibniz-Kriterium. Jedoch ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent.

iii) Die Aussage ist falsch: Sei $a_n = \frac{1}{n^2}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert nach Vorlesung. Jedoch ist $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent.

iv) Die Aussage ist falsch: Sei $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Jedoch ist $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent.

b) i) Die Aussage ist wahr: Wegen $P(x) = x^n \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k-n}\right)$ gilt $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$. Da P stetig ist, hat P nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle.

ii) Die Aussage ist falsch: Für das Polynom $P(x) = x + 1$ gibt es kein solches y, da sonst $y + 1 = y$ gelten würde.

iii) Die Aussage ist wahr: Wegen $\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k-n} \to 0$ für $x \to \infty$, gibt es nach b) i) ein $x_0 \geqslant 1$, so dass $P(x) \geqslant \frac{1}{2}x^n \geqslant \frac{1}{2}x$ für $x \geqslant x_0$. Mit einer Konstanten $C < \infty$ folgt $\int_0^{\infty} e^{-P(x)}\,dx \leqslant \int_0^{x_0} e^{-P(x)}\,dx + \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}}\,dx = C - 2[e^{-\frac{1}{2}x}]_{x_0}^{\infty} = C + 2e^{-\frac{1}{2}x_0} < \infty$.

c) Wir setzen $z = re^{i\varphi}$ mit $r \geqslant 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$\begin{aligned} r^6 e^{6i\varphi} = z^6 &= 4\sqrt{2}(8 - 8\,i) \\ &= 32\sqrt{2}(1 - i) \\ &= 64\, e^{i\frac{7}{4}\pi}. \end{aligned}$$

Es folgt $r^6 = 64$, also $r = 2$, und $6\varphi = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, also $\varphi = \frac{7}{24}\pi + \frac{k\pi}{3}$ für $k \in \mathbb{Z}$. Dies führt auf die sechs verschiedenen Lösungen $z_k = 2\, e^{i\left(\frac{7}{24}\pi + \frac{k\pi}{3}\right)}$ für $k = 0, 1, \ldots, 5$.

Die Lösungen sind also $2e^{i\frac{7}{24}\pi}$, $2e^{i\frac{15}{24}\pi}$, $2e^{i\frac{23}{24}\pi}$, $2e^{i\frac{31}{24}\pi}$, $2e^{i\frac{39}{24}\pi}$, $2e^{i\frac{47}{24}\pi}$.

Aufgabe 2 ((5+5) Punkte)

a) Untersuchen Sie die Reihen in i) und ii) auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz:

i)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+1)(k+2)}$$

ii)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$$

b) i) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$ die Ungleichung $3^n \leqslant 4\,n!$

ii) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $a_k \in \mathbb{R}$ mit $0 \leqslant a_k \leqslant 1$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) \leqslant n - 1.$$

Lösung:

a) i) Für $k \neq 0$ gilt

$$\frac{k}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k^2 + 3k + 2} = \frac{1}{k + 3 + \frac{2}{k}}.$$

Wegen $3 + \frac{2}{k} \leqslant k$ für $k \geqslant 4$, folgt $\frac{k}{(k+1)(k+2)} \geqslant \frac{1}{2k}$ für $k \geqslant 4$. Da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, ist also auch die gegebene Reihe divergent; damit ist sie weder konvergent, noch absolut konvergent.

ii) Wir benutzen das Wurzelkriterium. Für $k \geqslant 1$ gilt

$$\sqrt[k]{\left|\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}\right|} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \longrightarrow \frac{1}{e} \qquad \text{für } k \to \infty.$$

Da $\frac{1}{e} < 1$ gilt, ist die gegebene Reihe nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent und damit auch konvergent.

b) i) Wir zeigen die Ungleichung per Induktion über n. Für $n = 4$ gilt

$$3^4 = 81 \leqslant 96 = 4 \cdot 4!\,.$$

Sei nun die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$ bereits bewiesen. Dann gilt

$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= 3 \cdot 3^n \\ &\leqslant 3 \cdot 4\,n! && \text{(nach Ind.vor.)} \\ &\leqslant (n+1) \cdot 4\,n! && \text{(da } n \geqslant 4 \geqslant 2\text{)} \\ &= 4(n+1)!. \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt vollzogen und die Ungleichung gezeigt.

ii) Wir zeigen die Aussage wieder mittels Induktion über n. Für $n = 1$ gilt:

$$a_1 - a_1 = 0 = 1 - 1.$$

Sei die Aussage nun für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits gezeigt. Für $k = 1, \ldots, n+1$ seien a_k mit $0 \leqslant a_k \leqslant 1$ gegeben. Wegen $0 \leqslant a_n a_{n+1} \leqslant 1$ gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n a_{n+1} - a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot (a_n a_{n+1}) \leqslant n - 1. \qquad (*)$$

Es gilt $a_n + a_{n+1} - 1 = a_n a_{n+1} - (1 - a_n)(1 - a_{n+1})$, mit $0 \leqslant a_n, a_{n+1} \leqslant 1$ also $a_n + a_{n+1} - 1 \leqslant a_n a_{n+1}$. Zusammen mit $(*)$ erhalten wir

$$a_1 + \ldots + a_{n+1} - a_1 \cdot \ldots a_{n+1} \leqslant (n+1) - 1,$$

womit der Induktionsschritt vollbracht ist.

Aufgabe 3 ((5+5) Punkte)

a) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ist der *Kotangens* definiert durch $\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$. Sei

$$f : (0, \pi) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \cot x.$$

i) Berechnen Sie die Ableitung von f. Folgern Sie, dass f bijektiv ist.

ii) Die Umkehrfunktion von f ist der *Arkuskotangens*: $f^{-1} = \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$. Begründen Sie, dass arccot differenzierbar ist und zeigen Sie $\operatorname{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2}$.

b) i) Sei $\frac{2}{\pi} < a < b$. Berechnen Sie

$$\int_a^b \frac{\log\left(\cot\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}\, dx.$$

Hinweis: Substituieren Sie $y = \cot\left(\frac{1}{x}\right)$.

ii) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral $\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{4}{\pi}} \frac{\log\left(\cot\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}\, dx$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert des Integrals.

Lösung:

a) i) Wir berechnen mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Es gilt $\sin x > 0$ für alle $x \in (0, \pi)$, also $-\frac{1}{\sin^2 x} < 0$ für alle $x \in (0, \pi)$. Also ist f streng monoton fallend und damit injektiv. Ferner gilt $\lim_{x \nearrow \pi} \cot x = \lim_{x \nearrow \pi} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$ und $\lim_{x \searrow 0} \cot x = \lim_{x \searrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} = \infty$. Da $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ stetig ist, gibt es also nach dem Zwischenwertsatz für jedes $y \in \mathbb{R}$ ein $x_0 \in (0, \pi)$ mit $\cot x_0 = y$. Also ist f surjektiv. Da f injektiv und surjektiv ist, ist f bijektiv.

ii) Die Funktion f ist auf $(0, \pi)$ differenzierbar und es gilt $f'(y) \neq 0$ für jedes $y \in (0, \pi)$. Nach dem Satz über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion ist damit $f^{-1} = \operatorname{arccot}$ differenzierbar. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot}' x = (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= -\sin^2(\operatorname{arccot} x). \end{aligned}$$

Aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ für $x \in (0, \pi)$, also

$$\operatorname{arccot}' x = -\frac{1}{1 + \cot^2(\operatorname{arccot} x)} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

b) i) Wir substituieren $y = \cot\left(\frac{1}{x}\right)$. Mit Teil a) i) gilt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}$. Mit dieser Substitution und anschließender partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\log\left(\cot\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}\,dx &= \int_{\cot\left(\frac{1}{a}\right)}^{\cot\left(\frac{1}{b}\right)} \log y\,dy \\
&= [y \log y]_{\cot\left(\frac{1}{a}\right)}^{\cot\left(\frac{1}{b}\right)} - \int_{\cot\left(\frac{1}{a}\right)}^{\cot\left(\frac{1}{b}\right)} y \cdot \frac{1}{y}\,dy \\
&= [y \log y - y]_{\cot\left(\frac{1}{a}\right)}^{\cot\left(\frac{1}{b}\right)} \\
&= \left(\cot\frac{1}{b}\right)\log\left(\cot\frac{1}{b}\right) - \left(\cot\frac{1}{a}\right)\log\left(\cot\frac{1}{a}\right) - \cot\frac{1}{b} + \cot\frac{1}{a}\,.
\end{aligned}$$

ii) Gilt $a \searrow \frac{2}{\pi}$, so gilt $\frac{1}{a} \nearrow \frac{\pi}{2}$ und weiterhin $\cot\left(\frac{1}{a}\right) \searrow 0$. Nach Vorlesung (oder mit der Regel von de L'Hospital) gilt $\lim_{t\searrow 0}(t \log t) = 0$, also $\left(\cot\frac{1}{a}\right)\log\left(\cot\frac{1}{a}\right) \to 0$ für $a \searrow \frac{2}{\pi}$. Damit ist das uneigentliche Integral $\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{4}{\pi}} \frac{\log\left(\cot\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^2\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}\,dx$ konvergent und der Wert berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{4}{\pi}} \frac{\log\left(\cot\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}\,dx &= \cot\left(\frac{\pi}{4}\right)\log\left(\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \log(1) - 1 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 ((3+4+3) Punkte)

a) Untersuchen Sie die Folge

$$a_n = \sqrt{n}\pi^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \sqrt{n}e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Sei $I = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Finden Sie eine Folge von Funktionen $f_k \in C^1(I)$, so dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Weisen Sie nach, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tatsächlich die geforderten Eigenschaften erfüllt.

c) Sei $J = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $g : J \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}\,x^a$ Lipschitzstetig ist.

Lösung:

a) Es gilt $a_n = \frac{\pi^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$. Für $x > 0$ setzen wir $h(x) := \frac{\pi^x - e^{-x}}{x}$ und untersuchen $\lim_{x\searrow 0} h(x)$. Es gilt $\lim_{x\searrow 0}(\pi^x - e^{-x}) = 0$, $\lim_{x\searrow 0} x = 0$, sowie $(x)' = 1 \neq 0$ auf $(0, \infty)$. Damit sind die Voraussetzungen zur Regel von de L'Hospital erfüllt und es gilt

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{\pi^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{\pi^x \log\pi + e^{-x}}{1} = \log\pi + 1.$$

Wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \searrow 0$ für $n \to \infty$ ist also a_n konvergent und es gilt $a_n \to 1 + \log\pi$ für $n \to \infty$.

b) Setze bspw. $f_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x^2 + \frac{1}{2k} & \text{für } |x| < \frac{1}{k} \\ |x| & \text{für } |x| \geqslant \frac{1}{k} \end{cases}$. Die Funktion f_k ist offensichtlich für $|x| < \frac{1}{k}$ und $|x| > \frac{1}{k}$ stetig differenzierbar. Für $x = \frac{1}{k}$ gilt $|x| = \frac{1}{k}$ und $\frac{k}{2}x^2 + \frac{1}{2k} = \frac{k}{2}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$. Mit $g(x) := \frac{k}{2}x^2 + \frac{1}{2k}$ gilt also $\lim_{x\nearrow\frac{1}{k}} \frac{f_k(x) - f_k(\frac{1}{k})}{x - \frac{1}{k}} = g'\left(\frac{1}{k}\right) = k\frac{1}{k} = 1$, $\lim_{x\searrow\frac{1}{k}} \frac{f_k(x) - f_k(\frac{1}{k})}{x - \frac{1}{k}} =$

$f'\left(\frac{1}{k}\right) = 1$. Damit ist f_k an der Stelle $\frac{1}{k}$ differenzierbar. Dasselbe Argument liefert die Differenzierbarkeit an der Stelle $-\frac{1}{k}$. Damit ist f_k differenzierbar und es gilt $f_k'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \leqslant -\frac{1}{k} \\ kx & \text{für } |x| < \frac{1}{k} \\ 1 & \text{für } x \geqslant \frac{1}{k} \end{cases}$.

Es gilt $kx = -1$ für $x = -\frac{1}{k}$ und $kx = 1$ für $x = \frac{1}{k}$; insbesondere ist f_k' stetig und damit f_k stetig differenzierbar. Für die Konvergenz berechnen wir

$$\begin{aligned}\sup_{x\in I} |f_k(x) - f(x)| &= \sup_{x\in(-\frac{1}{k},\frac{1}{k})} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x\in(-\frac{1}{k},\frac{1}{k})} \left|\frac{k}{2}x^2 + \frac{1}{2k} - |x|\right| \\ &\leqslant \sup_{x\in(-\frac{1}{k},\frac{1}{k})} \left(\frac{k}{2}x^2 + \frac{1}{2k} + |x|\right) = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k} \longrightarrow 0 \text{ für } k \to \infty.\end{aligned}$$

Also konvergiert f_k gleichmäßig gegen f.

c) Die Abbildung $g \in C^1(J)$ ist genau dann Lipschitzstetig, wenn $|g'|$ auf J beschränkt ist. Es gilt $g(x) = x^{a+\frac{1}{2}}$, also $g'(x) = \left(a + \frac{1}{2}\right) x^{a-\frac{1}{2}} = \left(a + \frac{1}{2}\right) \exp\left(\left(a - \frac{1}{2}\right) \log x\right)$. Ist $a \geqslant \frac{1}{2}$, so ist $-\infty < \left(a - \frac{1}{2}\right) \log x \leqslant 0$ für $x \in (0, 1)$, also $\exp\left(\left(a - \frac{1}{2}\right) \log x\right) \leqslant 1$ und damit $|g'(x)| \leqslant a + \frac{1}{2}$. Damit ist g Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $a + \frac{1}{2}$. Ist $a = -\frac{1}{2}$, so ist $g \equiv 1$, also Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 0.

Ist $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, so gilt $\left(a - \frac{1}{2}\right) \log x \to \infty$ für $x \searrow 0$, also $g'(x) \to \infty$ für $x \searrow 0$. Ist schließlich $a < -\frac{1}{2}$, so gilt auch $\left(a - \frac{1}{2}\right) \log x \to \infty$ für $x \searrow 0$, hier also $g'(x) \to -\infty$ für $x \searrow 0$.

Also ist g genau dann Lipschitzstetig, wenn $a \in \{-\frac{1}{2}\} \cup [\frac{1}{2}, \infty)$.