Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
23.09.2014

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1: (3 + 3 + 4 = 10 Punkte)

(a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^{n+k}}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(c) Bestimmen Sie die Menge M aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(4-x)^{3n}}{8^n (n^2+1)}$$

Aufgabe 2: ((1 + 2 + 2) + (2 + 1 + 2) = 10 Punkte)

(a) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^x$ und $g(x) = 2 + x - x^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass ein $x^* \in (0,1)$ existiert mit $f(x^*) = g(x^*)$.

(ii) Zeigen Sie, dass es kein weiteres $y^* \in [0, \infty)$ gibt mit $f(y^*) = g(y^*)$.

(iii) Berechnen Sie $m = \inf \{g(x) : x \in (-\infty, 0]\}$. Schlussfolgern Sie, dass es kein $z^* \in (-\infty, 0]$ gibt mit $f(z^*) = g(z^*)$.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $h_n(x) = e^{-\sqrt[n]{x^2}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf gleichmäßige Konvergenz auf $[0, 1]$.

(iii) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf gleichmäßige Konvergenz auf $[1, 2]$.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 3: ((2 + 2 + 2) + (2 + 2) = 10 Punkte)

(a) Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\sin(x)\right)}{x^2}$,

(ii) $\lim_{x\to\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{\log(x)}}$, sowie

(iii) $\lim_{x\to\infty}\left[\cos\left(\sqrt{x}\right)-\cos\left(\sqrt{x+1}\right)\right]$

existieren. Berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(b) Sei $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = e^{-x}\tan(x) \qquad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

(i) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von f.

(ii) Geben Sie das Taylor-Polynom $T_0^1 f$ erster Ordnung von f um $x_0 = 0$ und bestimmen Sie eine Konstante $C > 0$ so, dass

$$\left|f(x) - (T_0^1 f)(x)\right| \leq C\,|x|^2$$

für alle $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ gilt.

Aufgabe 4: ((2 + 2 + 2) + (2 + 2) = 10 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Wert der Integrale

(i) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arccos(t)\mathrm{d}t$,

(ii) $\int_{-1}^0 t^2 e^{-t}\mathrm{d}t$, sowie

(iii) $\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos(\log(t))\sin(\log(t))}{t}\mathrm{d}t$.

(b) Untersuchen Sie die uneigentlichen Integrale

(i) $\int_1^\infty \cos(2t)e^{-t^3}\mathrm{d}t$ und

(ii) $\int_0^1 \frac{1}{2t-t^2}\mathrm{d}t$

auf Konvergenz.

Viel Erfolg!

Die Einsichtnahme in die korrigierten Bachelor-Modulprüfungen findet am Mittwoch, den **22.10.2014**, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Hörsaal am Fasanengarten (Gebäude 50.35) statt.