Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
22.10.2014

# Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

## Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

### Aufgabe 1:

(a) Beweis durch vollständige Induktion:

- IA: Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1} k^2 = 1 = (-1)^{1+1} \frac{1(1+1)}{2}$$

- IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses $n$ gelte die IV:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$$

Dann gilt für $n+1$ in der Tat:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 &= (-1)^{n+2}(n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 \\
&\overset{\text{IV}}{=} (-1)^{n+2}(n+1)^2 + (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \\
&= (-1)^{n+2}(n+1)\left((n+1) - \frac{n}{2}\right) \\
&= (-1)^{n+2}(n+1)\frac{n+2}{2}
\end{aligned}$$

□

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^{n+k}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k} 1^{n-k}} \\
&\overset{\text{Binom}}{=} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{1}{3}\right)^n} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n}
\end{aligned}$$

Damit ist ferner:

$$\frac{1}{2} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n}}_{=a_n} \leq \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{4}{8}\right)^n} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

Nach dem Einschnürungssatz ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

(c) Sei $y := \left(\frac{4-x}{2}\right)^3$. Dann gilt

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(4-x)^{3n}}{8^n(n^2+1)} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1}\left(\frac{4-x}{2}\right)^{3n} = \sum_{n\geq 0} \frac{y^n}{n^2+1}.$$

Sei $b_n := \frac{1}{n^2+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Nach dem Quotientenkriterium für Potenzreihen, ist der Konvergenzradius $\rho$ von $\sum_{n\geq 0} b_n y^n$ gleich 1. Damit ist $\sum_{n\geq 0} b_n y^n$ für alle $y \in (-1,1)$ (absolut) konvergent und für alle $y$ mit $|y| > 1$ divergent.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|b_n(-1)^n| = b_n 1^n = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$$

Da $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist (Resultat der Vorlesung), ist $\sum_{n\geq 0} b_n y^n$ nach dem Majorantenkriterium auch in den Randpunkten $y \in \{-1,1\}$ (absolut) konvergent.

Wegen $x = 4 - 2\sqrt[3]{y}$, ist $M = [2,6]$.

## Aufgabe 2:

(a) Sei für diese Teilaufgabe $h := f - g$. Klar: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(i) Klar: $h$ ist stetig. Es ist

$h(0) = f(0) - g(0) = 1 - 2 = -1 < 0$ und $h(1) = f(1) - g(1) = e - 2 + 1 - 1 = e - 2 > 0$.

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x^* \in (0,1)$ mit $h(x^*) = 0$.

(ii) Klar: $h$ ist differenzierbar. Für alle $x > 0$ gilt

$$h'(x) = \underbrace{e^x}_{>1} + 3x^2 - 1 > 1 + 3x^2 - 1 = 3x^2 > 0.$$

Damit ist $h$ streng monoton wachsend auf $[0,\infty)$ (Korollar des Mittelwertsatzes) und insbesondere dort injektiv. Damit kann es kein $[0,\infty) \ni y^* \neq x^*$ mit $h(y^*) = 0$ geben.

(iii) Für alle $x < -1$ gilt

$$g(x) = 2 + \underbrace{x}_{>x^3} - x^3 > 2.$$

Ferner ist $g(0) = g(-1) = 2$. Damit gilt

$$m = \inf\{g(x) : x \in (-\infty, 0]\} = \min\{g(x) : x \in [-1,0]\}.$$

Da $[-1,0]$ kompakt und $g$ stetig ist, existiert nach dem Satz von Maximum ein $x_m \in [-1,0]$ mit $m = g(x_m)$. Ist $x_m \in (-1,0)$, so muss $g'(x_m) = 0$ gelten. Es ist

$$g'(x) = 1 - 3x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$$

Also ist $x_0 := -\frac{1}{\sqrt{3}}$ die einzige Nullstelle von $g'$ in $[-1, 0]$. Es ist

$$g(x_0) = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{9} < 2 = g(0) = g(-1).$$

Damit ist $x_m \notin \{-1, 0\}$, also $x_m = x_0$.

Schließlich ist

$$g(x_0) = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{9} = 1 + \frac{9 - 2\sqrt{3}}{9} > 1 + \frac{9 - 2 \cdot 3}{9} = \frac{4}{3} > 1.$$

Da $f$ streng monoton wachsend ist, gilt $f(x) \leq f(0) = 1$. Also ist $g(x) \geq m > 1 \geq f(x)$ für alle $x \in (-\infty, 0]$. Insbesondere ist $f(x) \neq g(x)$ für alle $x \in (-\infty, 0]$.

(b) (i) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } a > 0, \\ 0 & \text{, falls } a = 0. \end{cases}$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, gilt damit für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = \lim_{n \to \infty} h_n(x) = e^{-\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x^2}} = \begin{cases} e^0 = 1 & \text{, falls } x = 0, \\ e^{-1} = \frac{1}{e} & \text{, falls } x \neq 0. \end{cases}$$

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $h_n$ stetig. Wäre die Konvergenz gleichmäßig, so müsste $h$ stetig sein (Satz der Vorlesung). Aber die Grenzfunktion $h$ ist unstetig bei 0. Also kann die Konvergenz auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig erfolgen.

(iii) Da die $n$-te-Wurzel und die Exponentialfunktion streng monoton wachsend sind, ist $h_n$ streng monoton fallend für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt

$$h_n(x) \leq h_n(1) = \frac{1}{e}$$

für alle $x \in [1, 2]$. Deshalb ist

$$|h(x) - h_n(x)| = \left| \frac{1}{e} - h_n(x) \right| = \frac{1}{e} - h_n(x) \leq \frac{1}{e} - h_n(2) =: a_n$$

für alle $x \in [1, 2]$. Nach Teilaufgabe (i) ist $\lim_{n \to \infty} h_n(2) = \frac{1}{e}$, also $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Damit ist die Konvergenz auf $[1, 2]$, nach einem Kriterium für gleichmäßige Konvergenz, gleichmäßig.

## Aufgabe 3:

(a) (i) Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sin(x)\right)}{x}\overset{\text{l'Hospital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin(x)\right)\cos(x)}^{\to 1}}{\underbrace{1}_{\neq 0}}=1.$$

Folglich ist

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\sin(x)\right)}^{\to 0}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}}\overset{\text{l'Hospital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sin(x)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin(x)\right)\cos(x)}{\underbrace{2x}_{\neq 0,\text{ für }x\neq 0}}$$

$$=\underbrace{\left[\lim_{x\to 0}\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin(x)\right)\right]}_{=1}\cdot\underbrace{\left[\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sin(x)\right)}{x}\right]}_{=1}=1.$$

(ii) Nach der Definition der allgemeinen Potenz gilt für alle $x\in\mathbb{R}^+$:

$$(1+x^2)^{\frac{1}{\log(x)}}=e^{\frac{\log(1+x^2)}{\log(x)}}$$

Es gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\log(1+x^2)}^{\to\infty}}{\underbrace{\log(x)}_{\to\infty}}\overset{\text{l'Hospital}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\neq 0\text{ für }x\neq 0}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{1+x^2}=2$$

Folglich ist, wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion,

$$\lim_{x\to\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{\log(x)}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x^2)}{\log(x)}}=e^2.$$

(iii) Sei $x>0$. Nach dem Mittelwertsatz, existiert ein $\xi_x\in(\sqrt{x},\sqrt{x+1})$ mit

$$\cos\left(\sqrt{x}\right)-\cos\left(\sqrt{x+1}\right)=-\sin(\xi_x)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right).$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}0\le\left|\cos\left(\sqrt{x}\right)-\cos\left(\sqrt{x+1}\right)\right| &\le \left|\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right|\\ &= \left|\frac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right|\le\frac{1}{2\sqrt{x}}\xrightarrow{x\to\infty}0.\end{aligned}$$

Nach dem Einschnürungssatz folgt

$$\lim_{x\to\infty}\left[\cos\left(\sqrt{x}\right)-\cos\left(\sqrt{x+1}\right)\right]=0.$$

(b) (i) Es gilt

$$f'(x) = -e^{-x}\tan(x) + e^{-x}(1+\tan^2(x)),$$

sowie

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-x}\tan(x) - e^{-x}(1+\tan^2(x)) - e^{-x}(1+\tan^2(x)) + 2e^{-x}\tan(x)(1+\tan^2(x)) \\ &= e^{-x}\left(3\tan(x) - 2 - 2\tan^2(x) + 2\tan^3(x)\right) \end{aligned}$$

für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(ii) Das Taylor-Polynom $T_0^1 f$ von $f$ um $x_0$ ist gegeben durch

$$(T_0^1 f)(x) = f(0) + f'(0)\cdot x = x$$

für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Nach dem Satz von Taylor existiert für jedes $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ein $\xi \in [\min\{0,x\}, \max\{0,x\}]$ mit

$$f(x) - (T_0^1 f)(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)\cdot x^2.$$

Mit der Monotonie des Tangens und der Exponentialfunktion folgt

$$\begin{aligned} \left|f(x) - (T_0^1 f)(x)\right| &= \frac{1}{2}\left|e^{-\xi}\left(3\tan(\xi) - 2 - 2\tan^2(\xi) + 2\tan^3(\xi)\right)\right| |x|^2 \\ &\le \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{4}} 9 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) x^2 \le \underbrace{\frac{9}{2} e^{\frac{\pi}{4}}}_{=:C} x^2 \end{aligned}$$

für alle $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

## Aufgabe 4:

(a) (i) Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arccos(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\arccos(t)}_{v}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} [t\cdot\arccos(t)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4} - \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

(ii) Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \underbrace{t^2}_{u}\underbrace{e^{-t}}_{v'}\mathrm{d}t &\overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[e^{-t}t^2\right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \underbrace{2t}_{u}\underbrace{e^{-t}}_{v'}\mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} e - 2\left[e^{-t}t\right]_{-1}^0 + 2\int_{-1}^0 e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= e - 2e - 2\left[e^{-t}\right]_{-1}^0 = -e - 2 + 2e = e - 2 \end{aligned}$$

(iii) Es gilt

$$\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos(\log(t))\sin(\log(t))}{t}\mathrm{d}t \underset{\mathrm{d}t = t\mathrm{d}x}{\overset{x=\log(t)}{=}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin^2(x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

(b) (i) Für alle $t \geq 1$ gilt

$$\left|\cos(2t)e^{-t^3}\right| \leq e^{-t^3} \leq e^{-t}.$$

Wegen

$$\int_1^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_1^T = \frac{1}{e} - \lim_{T\to\infty} e^{-T} = \frac{1}{e} < \infty,$$

konvergiert das uneigentliche Integral nach dem Majorantenkriterium.

(ii) Für alle $t \in (0,1]$ gilt

$$0 < t^2 \leq t.$$

Folglich ist

$$2t - t^2 = t + \underbrace{t - t^2}_{\geq 0} > 0$$

und deshalb

$$\frac{1}{2t - t^2} \geq \frac{1}{2t}$$

für alle $t \in (0,1]$. Wegen

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \lim_{T\to 0+}\int_T^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \lim_{T\to 0+}\left[\log(t)\right]_T^1 = \lim_{T\to\infty} -\log(T) = \infty,$$

ist das uneigentliche Integral divergent nach dem Minorantenkriterium.