Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
17.09.2015

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (3+3+4=10 Punkte)

a) Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $n \geqslant 6$

$$n! \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Hinweis: Benutzen Sie die aus der Vorlesung bekannte Abschätzung $n^n \leqslant \frac{(n+1)^n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert und berechnen Sie ihn wenn möglich.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right).$$

c) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ folgt daraus die Konvergenz der Reihe?
Hinweis: Schätzen Sie die Koeffizienten nach oben und unten ab. Sie müssen die Randpunkte nicht betrachten.

Aufgabe 2 (4+2+4=10 Punkte)

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist und berechnen Sie f'.

b) Zeigen Sie, dass

$$|\log(x) - \log(y)| \leqslant 2|x-y| \qquad \forall x, y \in [1/2, \infty)$$

c) Geben Sie die maximale Lösung des folgenden Anfangswertproblems an.

$$y'(x) = \sin(x)(y(x) + \cos(x)), \qquad y(0) = 1.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 3 (5+(3+2)=10 Punkte)

a) Sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \int_0^x \cos(t)e^t \, dt.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, 0)$ und zeigen Sie, dass

$$|f(x) - (T_2(f,0))(x)| \leqslant 2|x|^3 \qquad \forall x \in (-\infty, \log(6)].$$

b) Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)}$.

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + \cos(x)}{x}$.

Aufgabe 4 ((3+2)+5=10 Punkte)

a) (i) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1)(5e^x - \sin(2x)) \, dx$.

(ii) Überprüfen Sie, ob das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x^2} \, dx$ existiert.
Hinweis: Nutzen Sie die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion.

b) Die Matrizen $A_\alpha \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) sowie die Vektoren $b, c \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(i) Für welche Werte von α ist $A_\alpha x = b$ lösbar? Geben Sie, wenn möglich, ein $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ an, sodass die Gleichung $A_{\alpha_0} x = b$ eine Lösung der Form $x = (x_0, x_0, x_0)$ besitzt.

(ii) Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $A_{-1} x = c$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

- Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Donnerstag, den **15.10.2015**, neben Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) und unter `www.math.kit.edu/iana1` veröffentlicht.
- Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Mittwoch, den **21.10.2015**, von **16 bis 18 Uhr** im Tulla-Hörsaal (Geb. 11.40) statt.
- Die **mündlichen Nachprüfungen** finden in der Woche vom **26.10.2015** bis **30.10.2015** statt.