Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
17.09.2015

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (3+3+4=10 Punkte)

a) Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $n \geqslant 6$

$$n! \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Hinweis: Benutzen Sie die aus der Vorlesung bekannte Abschätzung $n^n \leqslant \frac{(n+1)^n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert und berechnen Sie ihn wenn möglich.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right).$$

c) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+1)^n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ folgt daraus die Konvergenz der Reihe?
Hinweis: Schätzen Sie die Koeffizienten nach oben und unten ab. Sie müssen die Randpunkte nicht betrachten.

Lösungsvorschlag

a) Wir beweisen die Aussage mit Hilfe einer Induktion.
Induktionsanfang (IA): Es gilt ($n = 6$)

$$6! = 720 < 729 = 3^6.$$

Induktionsschrit (IS): Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 6$ (Induktionsvoraussetzung (IV)). Es folgt ($n \to n+1$)

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n! \overset{\text{(IV)}}{\leqslant} n+1\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n \overset{\text{Hinweis}}{\leqslant} n+1\cdot\frac{(n+1)^n}{2^{n+1}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}} = \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{n+\sqrt{n}-(n-\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Somit existiert der gesuchte Grenzwert und lautet 1.

c) Es handelt sich um eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt -1 und Koeffizienten

$$a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt

$$1 \xleftarrow{n\to\infty} 1 = \sqrt[n]{\frac{n}{n}} = \sqrt[n]{\frac{n}{\sqrt[n]{n^n}}} \leqslant \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \sqrt[n]{\frac{n}{1}} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Nach dem Sandwichprinzip gilt somit auch $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$ für $n \to \infty$, womit der Konvergenzradius der Potenzreihe durch den Kehrwert davon, also 1, gegeben ist. Dies bedeutet, dass die Reihe auf $(-2, 0)$ auf jeden Fall konvergiert.

Aufgabe 2 (4+2+4=10 Punkte)

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist und berechnen Sie f'.

b) Zeigen Sie, dass

$$|\log(x) - \log(y)| \leqslant 2|x-y| \qquad \forall x, y \in [1/2, \infty)$$

c) Geben Sie die maximale Lösung des folgenden Anfangswertproblems an.

$$y'(x) = \sin(x)(y(x) + \cos(x)), \qquad y(0) = 1.$$

Lösungsvorschlag

a) Außerhalb der Null ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar und es gilt mit Produkt- und Kettenregel

$$f'(x) = 2x\arctan(x) + x^2 \cdot \frac{1}{1+(1/x)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\arctan(x) - \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Für die Differenzierbarkeit in 0 betrachten wir den Differenzenquotienten und sehen, dass für $x \neq 0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\arctan(x)$$

gilt. Wegen

$$|x \arctan(x)| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot |x| \xrightarrow{x \to 0} 0$$

ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

b) Die Funktion g, definiert durch $g(x) = \log(x)$ für alle $x \in (0, \infty)$, ist differenzierbar mit $g'(x) = \frac{1}{x}$. Nach dem Mittelwertsatz gilt für $x, y \in [\frac{1}{2}, \infty)$, dass

$$|\log(x) - \log(y)| = |g(x) - g(y)| = |g'(\xi)||x - y| = \frac{1}{\xi}|x - y|$$

für ein ξ im Intervall zwischen x und y. Inbesondere liegt also auch ξ in $[\frac{1}{2}, \infty)$, womit

$$\frac{1}{\xi} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

und somit die Behauptung folgt.

c) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation von Satz 12.1 sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sin(x)$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$. Es gilt

$$A(x) := \int_{x_0}^{x} a(s)\, \mathrm{d}s = \int_0^x \sin(s)\, \mathrm{d}s = 1 - \cos(x)$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\, \mathrm{d}s &= \int_0^x \sin(s)\mathrm{e}^{\cos(s)-1} \cdot \cos(s) \overset{\text{P.I.}}{=} [-\cos(s)\mathrm{e}^{\cos(s)-1}]_{s=0}^{x} - \int_0^x \sin(s)\mathrm{e}^{\cos(s)-1}\, \mathrm{d}s \\ &= [(1 - \cos(s))\mathrm{e}^{\cos(s)-1}]_{s=0}^{x} = (1 - \cos(x))\mathrm{e}^{\cos(x)-1}\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz aus Abschnitt 12.3 der Vorlesung ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = y_0 \mathrm{e}^{A(x)} + \mathrm{e}^{A(x)} \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\, \mathrm{d}s = \mathrm{e}^{1-\cos(x)} + (1 - \cos(x))$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 3 (5+(3+2)=10 Punkte)

a) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \int_0^x \cos(t)\mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, 0)$ und zeigen Sie, dass

$$|f(x) - (T_2(f, 0))(x)| \leqslant 2|x|^3 \qquad \forall x \in (-\infty, \log(6)].$$

b) Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)}$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos(x)}{x}$.

Lösungsvorschlag

a) Die Funktion f ist beliebig oft differenzierbar und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$f'(x) = \cos(x)e^x$$

sowie

$$f''(x) = (\cos(x) - \sin(x))e^x,$$
$$f'''(x) = -2\sin(x)e^x,$$

Per Definition ist das gesuchte Taylorpolynom gegeben durch

$$(T_2(f,0))(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(x)x^2 = x + \frac{1}{2}x^2.$$

Für die Fehlerabschätzgung gilt nach Vorlesung

$$|f(x) - (T_2(f,0))(x)| = \frac{1}{3!}|f'''(\xi)| \cdot |x|^3$$

für ξ zwischen 0 und x. ist $x \in (-\infty, \log(6)]$, so gilt dies demnach insbesondere auch für ξ. Wir maximieren $|f'''|$ über das Intervall $(-\infty, \log(6)]$. Der Sinus ist im Betrag durch Eins beschränkt, die Exponentialfunktion ist monoton wachsend und deshalb durch $e^{\log(6)} = 6$ beschränkt. Insgesamt folgt also

$$|f'''(\xi)| \leqslant 2 \cdot 1 \cdot 6 = 12$$

und somit

$$|f(x) - (T_2(f,0))(x)| = \frac{12}{3!} \cdot |x|^3 = 2|x|^3$$

für $x \in (-\infty, \log(6)]$.

b) (i) Für $x > 0$ gilt per Definition

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\log(x^{-1})} = e^{-\sin(x)\log(x)}.$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, betrachten wir zunächst den Exponenten. Es gilt mit der Regel von de L'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} -\sin(x)\log(x) &= -\lim_{x\to 0+} \frac{\log(x)}{(\sin(x))^{-1}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{(\sin(x))^{-2}\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2(x)}{x\cos(x)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos(x) - x\sin(x)} = 0.\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)} = \mathrm{e}^0 = 1$$

Alternativ schreibe wir

$$-\sin(x)\log(x) = -\frac{\sin(x)}{x}\cdot x\log(x)$$

und mit dem bekannten Grenzwert des ersten Ausdrucks (-1) und

$$\lim_{x\to 0} x\log(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0$$

und somit schließlich dasselbe Ergebnis wie oben.

(ii) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{\cos(x)}{x}.$$

Wegen $(x > 0)$

$$\left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

folgt $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(x)}{x} = 0$ und somit

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos(x)}{x} = 1.$$

Aufgabe 4 ((3+2)+5=10 Punkte)

a) (i) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+1)(5\mathrm{e}^x - \sin(2x))\,\mathrm{d}x$.

(ii) Überprüfen Sie, ob das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ existiert.
Hinweis: Nutzen Sie die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion.

b) Die Matrizen $A_\alpha \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ sowie die Vektoren $b, c \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(i) Für welche Werte von α ist $A_\alpha x = b$ lösbar? Geben Sie, wenn möglich, ein $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ an, sodass die Gleichung $A_{\alpha_0} x = b$ eine Lösung der Form $x = (x_0, x_0, x_0)$ besitzt.

(ii) Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $A_{-1} x = c$.

Lösungsvorschlag

a) (i) Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1)(5\mathrm{e}^x - \sin(2x))\,\mathrm{d}x &\overset{\text{P.I.}}{=} \Big[(x+1)(5\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\cos(2x))\Big]_{x=0}^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 5\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\cos(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[(x+1)(5\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\cos(2x)) - (5\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\sin(2x))\Big]_{x=0}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \Big[x(5\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\cos(2x)) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x))\Big]_{x=0}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{5\pi}{4}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{4}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

(ii) Per Definition des uneigentlichen Riemannintegrals gilt

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Für $x > 0$ gilt

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \geqslant \frac{1}{x},$$

da alle Summanden positiv sind. Somit gilt wegen der Monotonie des Integrals

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\log(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \infty.$$

Somit existiert das uneigentliche Integral aus der Aufgabenstellung nicht.

b) Wir beginnen damit, die erweiterte Matrix $(A_\alpha|b|c)$ so weit wie möglich umzuformen, ohne spezielle Werte für α einzusetzen oder auszuschließen. Es gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} -2 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & \alpha & 1 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} -2 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & \alpha-1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c|c} -2 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

(i) Da ein Gleichungssystem genau dann lösbar ist, wenn die Matrix und die erweiterte Matrix denselben Rang haben, ist dies hier für $A_\alpha x = b$ genau für $\alpha \neq -1$ der Fall. In diesem Falle formen wir weiter um.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{\alpha+1} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 0 & 1+\frac{6}{\alpha+1} \\ 0 & 1 & 0 & 2-\frac{6}{\alpha+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{\alpha+1} \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2}-\frac{15}{(\alpha+1)} \\ 0 & 1 & 0 & 2-\frac{6}{\alpha+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{\alpha+1} \end{array}\right)$$

Der Vektor rechts ist nun die eindeutige Lösung des Gleichungssystems. Soll dieser drei gleiche Einträge haben, muss insbesondere der zweite mit dem dritten Eintrag übereinstimmen, also

$$2-\frac{6}{\alpha+1}=\frac{6}{\alpha+1} \Leftrightarrow 2=\frac{12}{\alpha+1} \Leftrightarrow \alpha=5.$$

Setzen wir $\alpha_0 = 5$ in den Vektor ein, sehen wir, dass sich tatsächlich der Vektor $(1,1,1)$ ergibt.

(ii) Mit der Umformung vom Beginn und $\alpha = -1$ formen wir $A_{-1}x = c$ weiter um.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Mit dem (-1)-Trick bzw. dem Aufstellen der sich ergebenden Gleichungen erhalten wir schließlich den Lösungsraum von $A_{-1}x = c$ mit

$$\left\{\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\right\}.$$