Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
20.09.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (3+3+4=10 Punkte)

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\frac{n+2}{n}.$$

b) Sei für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n := \cos\left(n\pi + \frac{1}{n}\right).$$

Bestimmen Sie $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

c) Bestimmen Sie alle diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für welche

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

konvergiert.

Aufgabe 2 ((3+2)+(4+1)=10 Punkte)

a) (i) Zeigen Sie für alle $x \geqslant 1$

$$2x \leqslant e^x \leqslant e^{x^2}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $d(x) := e^x - 2x$.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \geqslant 1$

$$\left|e^{-x^2} - e^{-y^2}\right| \leqslant |x-y|$$

gilt.

b) (i) Sei

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1;2\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2-x} \cdot \frac{1}{1-x}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Potenzreihenentwicklung von f um 0 gegeben ist durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]x^n \quad \forall |x| < 1.$$

Hinweis: Schreiben Sie f als $f(x) = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{1-x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ oder verwenden Sie das Cauchyprodukt.

— bitte wenden —

(ii) Bestimmen Sie $f^{(2016)}(0)$, wobei $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von f an der Stelle x bezeichne.

Aufgabe 3 ((2+3)+(3+2)=10 Punkte)

a) (i) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin\left(\sinh(\sqrt{2}x)\right)}{x} & ,\text{falls } x \neq 0 \\ a & ,\text{falls } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

(ii) Sei a die in **(i)** bestimmte Konstante. Bestimmen Sie alle diejenigen Stellen $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

b) Seien für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$g_n(x) := \sin\left(\frac{x}{n}\right),$$
$$h_n(x) := g_n'(x).$$

(i) Zeigen Sie, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 4 (2+3+5=10 Punkte)

a) Untersuchen Sie

$$\int_0^1 \tanh(\log(x)) \, dx$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

b) Seien für $a, b \in \mathbb{R}$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Tupel $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für welche die Gleichung $Ax = v$ eine Lösung besitzt und geben Sie diese in Abhängigkeit der Parameter a und b an.

c) Bestimmen Sie die (maximale) Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) - 2y(x) = \sin(x), \quad y(0) = 1.$$

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

- Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Montag, den **17.10.2016**, unter `www.math.kit.edu/iana1` veröffentlicht.
- Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **20.10.2016**, von **16 bis 18 Uhr** im Hörsaal neue Chemie (Geb. 30.46) statt.
- Die **mündlichen Nachprüfungen** finden in der Woche vom **24.10.2016** bis **28.10.2016** statt.