Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
20.09.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (3+3+4=10 Punkte)

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\frac{n+2}{n}.$$

b) Sei für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n := \cos\left(n\pi + \frac{1}{n}\right).$$

Bestimmen Sie $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

c) Bestimmen Sie alle diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für welche

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

konvergiert.

Lösungsvorschlag

a) Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang: Für $n = 2$ gilt

$$\prod_{k=2}^{2}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) = 1-\frac{2}{2\cdot 3} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2+2}{2},$$

d.h., die Aussage ist erfüllt.
Induktionsschluss: Die Aussage gelte für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) = \left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) \overset{\textbf{(IV)}}{=} \frac{(n+1)(n+2)-2}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{3}\frac{n+2}{n}$$
$$= \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}\frac{n+3}{n+1},$$

wie zu zeigen war.
Alternativ kann man zunächst die Faktoren wie folgt umformen:

$$1-\frac{2}{k(k+1)} = \frac{k^2+k-2}{k(k-1)} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Damit erhalten wir

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\frac{k+2}{k+1} = \frac{\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}}{\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k+2}} = \frac{\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}}{\prod_{k=4}^{n+2}\frac{k-1}{k}} = \frac{\prod_{k=2}^{3}\frac{k-1}{k}}{\prod_{k=n+1}^{n+2}\frac{k-1}{k}}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{3}\frac{n+2}{n},$$

wie zu zeigen war.

b) Nach dem Additionstheorem für den Cosinus gilt

$$a_n = \cos\left(n\pi+\frac{1}{n}\right) = \cos(n\pi)\cos\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n\cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

für alle $n\in\mathbb{N}$. Da der Cosinus stetig in 0 ist, gilt $\cos\left(\frac{1}{n}\right)\to 1$, wenn $n\to\infty$. Damit sind die beiden Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 1 und -1, wie man z.B. durch Betrachten gerader/ungerader Folgeglieder einsehen kann. Nach der Charakterisierung des $\limsup$ bzw. $\liminf$ als größten bzw. kleinsten Häufungswert ist folglich

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1,$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$

Alternativ kann man direkt in gerade und ungerade Folgenindizes unterscheiden und die 2π-Periodizität sowie die Stetigkeit des Cosinus (in 0 und π) verwenden.

c) Definiere zunächst $a_n := \frac{2^n}{\sqrt{n+1}}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 2\frac{1}{\sqrt[2n]{n+1}} \to 2,$$

wenn $n\to\infty$. Dabei haben wir verwendet, dass $\sqrt[n]{|p(n)|}\to 1$, wenn $n\to\infty$, für ein Polynom p gilt, welches nicht das Nullpolynom ist (siehe **Aufgabe 15a)**). Damit beträgt der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ gerade $\frac{1}{2}$. Das heißt, dass $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ (absolut) konvergiert, wenn $|x|<\frac{1}{2}$, und $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ divergiert, wenn $|x|>\frac{1}{2}$. Für $x=\frac{1}{2}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}},$$

welches bekanntermaßen (z.B. nach dem Integralkriterium) divergiert. Für $x=-\frac{1}{2}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Da $(\frac{1}{\sqrt{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$, wie man leicht nachrechnen kann, eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die letzte Reihe nach dem **Leibnizkriterium**. Insgesamt konvergiert also $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ genau dann, wenn $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Aufgabe 2 ((3+2)+(4+1)=10 Punkte)

a) (i) Zeigen Sie für alle $x \geqslant 1$

$$2x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^{x^2}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $d(x) := \mathrm{e}^x - 2x$.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \geqslant 1$

$$\left|\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-y^2}\right| \leqslant |x - y|$$

gilt.

b) (i) Sei

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1; 2\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2-x} \cdot \frac{1}{1-x}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Potenzreihenentwicklung von f um 0 gegeben ist durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] x^n \quad \forall |x| < 1.$$

Hinweis: Schreiben Sie f als $f(x) = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{1-x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ oder verwenden Sie das Cauchyprodukt.

(ii) Bestimmen Sie $f^{(2016)}(0)$, wobei $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von f an der Stelle x bezeichne.

Lösungsvorschlag

a) (i) Zunächst einmal sehen wir die hintere Ungleichung wie folgt ein: Für $x \geqslant 1$ ist $x^2 \geqslant x$. Dann gilt wegen der Monotonie der Exponentialfunktion

$$\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^{x^2}.$$

Wir betrachten nun $d(x) := \mathrm{e}^x - 2x$ wie im Hinweis vorgegeben. Es gilt

$$0 = d'(x_0) = \mathrm{e}^x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \log(2).$$

Es gilt weiter $d''(x_0) = \mathrm{e}^{x_0} > 0$. Damit ist $d(x_0)$ zunächst lokales und wegen der Offenheit von $\mathbb{R}$ und Differenzierbarkeit von d auf $\mathbb{R}$ gleichzeitig globales Minimum von d.[1] Es ist

$$d(x_0) = 2 \cdot (1 - \log(2)) = 2 \cdot (\log(\mathrm{e}) - \log(2)) > 0$$

wegen der Monotonie des Logarithmus. Insbesondere gilt dann für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^x = d(x) + 2x \geqslant d(x_0) + 2x \geqslant 2x,$$

wie zu zeigen war.
Alternativ kann man auch verwenden, dass $d(1) = \mathrm{e} - 2 > 0$ und $d'(x) = \mathrm{e}^x - 2 > 0$ für alle $x \geqslant 1$ gelten. Daraus folgt nämlich, dass d bei 1 positiv und danach streng wachsend ist, das heißt, positiv bleibt. Daraus folgt wie oben $\mathrm{e}^x \geqslant 2x$ für alle $x \geqslant 1$.

[1] Würde d kleinere Werte annehmen, müsste d' noch weitere Nullstellen haben.

(ii) Für $x = y$ ist die Aussage klar. Seien $x > y \geqslant 1$ und definiere $f(t) := \mathrm{e}^{-t^2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach dem **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** gibt es dann ein $\xi \in (y, x)$ mit

$$\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-y^2} = f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y) = \frac{-2\xi}{\mathrm{e}^{\xi^2}}(x-y).$$

Wegen (i) gilt dann wegen $\xi (> y) \geqslant 1$

$$\left|\frac{-2\xi}{\mathrm{e}^{\xi^2}}\right| = \frac{2\xi}{\mathrm{e}^{\xi^2}} \leqslant 1.$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\left|\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-y^2}\right| \leqslant |x-y|.$$

b) (i) *Alternative 1:* Wir schreiben

$$\frac{1}{2-x} \cdot \frac{1}{1-x} \overset{(!)}{=} \frac{a}{2-x} + \frac{b}{1-x} = \frac{a(1-x) + b(2-x)}{(2-x)(1-x)} = \frac{a + 2b - x(a+b)}{(2-x)(1-x)}$$

mit reellen Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$. Koeffizientenvergleich im Zähler liefert dan $a + 2b = 1$ und $a + b = 0$. Dies ist gerade für $b = 1 = -a$ erfüllt. Wir erhalten also

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$$

Die Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{1-x}$ ist gerade die geometrische Reihe, wenn $|x| < 1$ ist. Die PRE von $\frac{1}{2-x}$ erhalten wir wie folgt:

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}.$$

Für $|x| < 2$ lässt sich dies wieder mithilfe der geometrischen Reihe in eine Potenzreihe umschreiben:

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} x^n.$$

Damit erhalten wir insgesamt für $|x| < 1$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] x^n.$$

Alternative 2: Die Potenzreihenentwicklungen für $|x| < 1$ von $\frac{1}{2-x}$ bzw. $\frac{1}{1-x}$ haben wir oben gesehen. Sei $|x| < 1$ und definiere $a_n := 2^{-n+1} x^n$ und $b_n := x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann erhalten wir mithilfe des Cauchyprodukts aufgrund der absoluten Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gerade

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit

$$
\begin{aligned}
c_n &:= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} x^k x^{n-k} = \frac{x^n}{2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{x^n}{2} \cdot \frac{1-2^{-n-1}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] x^n,
\end{aligned}
$$

wobei wir im vorletzten Schritt die geometrische Summenformel verwendet haben. Damit ist die Aussage gezeigt.

(ii) Mithilfe von **(i)** erhalten wir wegen der Eigenschaft von Potenzreihen, dass diese gleichzeitig die Taylorreihenentwicklung sind,

$$
1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}
$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt dann

$$
f^{(2016)}(0) = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right] \cdot 2016!.
$$

Aufgabe 3 ((2+3)+(3+2)=10 Punkte)

a) (i) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$
f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(\sinh(\sqrt{2}x))}{x} & ,\text{falls } x \neq 0 \\ a & ,\text{falls } x = 0 \end{cases}
$$

stetig ist.

(ii) Sei a die in **(i)** bestimmte Konstante. Bestimmen Sie alle diejenigen Stellen $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

b) Seien für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
g_n(x) &:= \sin\left(\frac{x}{n}\right), \\
h_n(x) &:= g_n'(x).
\end{aligned}
$$

(i) Zeigen Sie, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

Lösungsvorschlag

a) (i) Zunächst einmal ist f außerhalb von 0 als Komposition stetiger Funktionen wieder stetig. Außerdem gilt

$$
\frac{\sin(\sinh(\sqrt{2}x))}{x} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sin(\sinh(\sqrt{2}x))}{\sinh(\sqrt{2}x)} \cdot \frac{\sinh(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}x} \to \sqrt{2},
$$

wenn $x \to 0$, da

$$
\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1 = \lim_{y\to 0} \frac{\sinh(y)}{y}.
$$

Damit ist f genau dann stetig, wenn $a = \sqrt{2}$ gewählt wird.

(ii) Außerhalb von 0 ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Des Weiteren gilt für $x \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{\frac{\sin\left(\sinh(\sqrt{2}x)\right)}{x} - \sqrt{2}}{x} = \frac{\sin\left(\sinh(\sqrt{2}x)\right) - \sqrt{2}x}{x^2} \\
&= \frac{\sin\left(\sinh(\sqrt{2}x)\right) - \sinh(\sqrt{2}x)}{x^2} + \frac{\sinh(\sqrt{2}x) - \sqrt{2}x}{x^2} \\
&= \frac{\sin\left(\sinh(\sqrt{2}x)\right) - \sinh(\sqrt{2}x)}{(\sinh(\sqrt{2}x))^3} \cdot \left(\frac{\sinh\sqrt{2}x}{\sqrt{2}x}\right)^2 \cdot 2\sinh(\sqrt{2}x) \\
&\quad + \frac{\sinh(\sqrt{2}x) - \sqrt{2}x}{(\sqrt{2}x)^3} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}x.
\end{aligned}
$$

Nun gelten

$$
\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)-y}{y^3} = -\frac{1}{6} = -\lim_{y\to 0} \frac{\sinh(y)-y}{y^3},
$$

wie man z.B. durch die jeweiligen Potenzreihenentwicklungen einsehen kann. Zusätzlich mit

$$
\lim_{y\to 0} \frac{\sinh(y)}{y} = 1
$$

wie oben gilt schließlich

$$
\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.
$$

Das heißt gerade, dass f in 0 differenzierbar ist.
Alternativ kann man in (i) und (ii) mit der Regel von de l'Hospital rechnen.

b) (i) Zunächst einmal konvergiert $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offensichtlich punktweise auf $\mathbb{R}$ gegen die Nullfunktion. Wählt man nun $x_n := \frac{n\pi}{2}$, so gilt

$$
|g_n(x_n) - 0| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 1 \not\to 0,
$$

wenn $n \to \infty$. Das bedeutet aber gerade, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

(ii) Es ist

$$
h_n(x) = g_n'(x) = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{x}{n}\right)
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich konvergiert auch $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion. Außerdem gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$
|h_n(x) - 0| = \left|\frac{1}{n}\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n} \to 0,
$$

wenn $n \to \infty$, unabhängig von x. Das heißt gerade, dass $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

Aufgabe 4 (2+3+5=10 Punkte)

a) Untersuchen Sie

$$\int_0^1 \tanh(\log(x)) \, \mathrm{d}x$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

b) Seien für $a, b \in \mathbb{R}$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Tupel $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für welche die Gleichung $Ax = v$ eine Lösung besitzt und geben Sie diese in Abhängigkeit der Parameter a und b an.

c) Bestimmen Sie die (maximale) Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) - 2y(x) = \sin(x), \quad y(0) = 1.$$

Lösungsvorschlag

a) Zunächst einmal gilt

$$|\tanh(y)| \leqslant 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Da die konstante Einsfunktion auf $[0, 1]$ (Riemann-)integrierbar ist, konvergiert nach dem **Majorantenkriterium für Integrale** $\int_0^1 \tanh(\log(x)) \, \mathrm{d}x$ absolut.

Alternativ lässt sich das Integral über den Betrag des Integranden auch explizit berechnen, indem man

$$\tanh(\log(x)) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \leqslant 0 \quad \forall x \in (0, 1]$$

verwendet. Insbesondere gilt

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right| = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1} \quad \forall x \in (0, 1].$$

Alternativ genügt es jedoch

$$\int_0^1 |\tanh(\log(x))| \, \mathrm{d}x = \lim_{a \to 0} \int_a^1 |\tanh(\log(x))| \, \mathrm{d}x = \lim_{a \to 0} \int_a^1 \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right| \mathrm{d}x = \int_0^1 \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right| \mathrm{d}x$$

zu berechnen und dann zu verwenden, dass $x \mapsto \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right|$ auf $[0, 1]$ stetig und damit (Riemann-)integrierbar ist.

b) Wir bringen die erweiterte Matrix $(A|v)$ auf Zeilennormalform:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ b & 2 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-b) \\ + \end{array} \quad \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 0 & 2 - ab & 4 - 3b \end{array} \right).$$

Für $ab \neq 2$ lautet der Lösungsvektor

$$x = \begin{pmatrix} 3 - a \cdot \frac{4 - 3b}{2 - ab} \\ \frac{4 - 3b}{2 - ab} \end{pmatrix} = \frac{1}{2 - ab} \begin{pmatrix} 6 - 4a \\ 4 - 3b \end{pmatrix}.$$

Im Falle $ab = 2$ ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $4 - 3b = 0$ gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn $b = \frac{4}{3}$ und $a = \frac{2}{b} = \frac{3}{2}$ gelten. In diesem Fall ist das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar. Alle Lösungen sind dann durch

$$x = \begin{pmatrix} 3 - \frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix}$$

mit $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

c) Mit der Notation aus der Vorlesung bestimmen wir zunächst

$$A(x) := \int_{x_0}^{x} a(s)\ \mathrm{d}s = \int_0^x 2\ \mathrm{d}s = 2x,$$

wobei $a(s) := 2$ und $x_0 := 0$ in unserem Fall sind. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\ \mathrm{d}s = \int_0^x \mathrm{e}^{-2s} \sin(s)\ \mathrm{d}s &\overset{p.I.}{=} -\mathrm{e}^{-2s}\cos(s)\Big|_0^x - 2\int_0^x \mathrm{e}^{-2s}\cos(s)\ \mathrm{d}s \\ &\overset{p.I.}{=} -\mathrm{e}^{-2x}\cos(x) + 1 - 2\mathrm{e}^{-2s}\sin(s)\Big|_0^x - 4\int_0^x \mathrm{e}^{-2s}\sin(s)\ \mathrm{d}s \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-2x}\cos(x) - 2\mathrm{e}^{-2x}\sin(x) - 4\int_0^x \mathrm{e}^{-2s}\sin(s)\ \mathrm{d}s \end{aligned}$$

mit $b(s) := \sin(s)$. Damit erhalten wir

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\ \mathrm{d}s = \int_0^x \mathrm{e}^{-2s}\sin(s)\ \mathrm{d}s = \frac{1}{5}\left[1 - \mathrm{e}^{-2x}(\cos(x) + 2\sin(x))\right]$$

Mit der Formel der *Variation der Konstanten* erhalten wir daher als (maximale) Lösung des gegebenen Anfangswertproblems

$$\Phi(x) := \mathrm{e}^{A(x)}y(0) + \mathrm{e}^{A(x)}\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(s)}b(s)\ \mathrm{d}s = \mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{2x} - \cos(x) - 2\sin(x)\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alternativ kann man zunächst als homogene Lösung $y_h(x) := c\mathrm{e}^{2x}$ bestimmen und als inhomogene Lösung

$$y_p(x) := a\cos(x) + b\sin(x)$$

ansetzen. Durch Einsetzen von y_p in die Differentialgleichung und mithilfe von Koeffizientenvergleich von sin und cos, erhält man so $a = -\frac{1}{5}$ und $b = -\frac{2}{5}$. Durch Einsetzen des Anfangswertes in $\Phi := y_h + y_p$ erhalten wir ebenso die obige Lösung.