Institut für Analysis
Arbeitsgruppe Angewandte Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

SS2017
19.09.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1: (6 + 4 = 10 Punkte)

(a) Die Folge von komplexen Zahlen (z_n) sei rekursiv definiert durch

$$z_0 = \mathrm{i}, \qquad z_1 = 1, \qquad z_{n+2} = -\frac{z_n + \mathrm{i} z_{n+1}}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

(i) Geben Sie den Betrag, sowie den Real- und den Imaginärteil der komplexen Zahl $z = (z_2 + z_3)^{-1}$ an.

(ii) Stellen Sie eine Vermutung über die geschlossene Form von (z_n) auf und beweisen Sie diese mit Hilfe der vollständigen Induktion.

(b) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die folgende Potenzreihe konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^n} (x-1)^{2n}.$$

Aufgabe 2: (3 + 3 + 4 = 10 Punkte)

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$f_n(x) = \cos\left(x + \frac{1}{n}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Untersuchen Sie die Funktionenfolge (f_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\sin(x) = x$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ hat.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $x \in [-1, 1]$ gelten muss. Verwenden Sie den Mittelwertsatz.

(c) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$g_a(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{\sin(x) - x}, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ a & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für welche a ist g_a stetig? Ist g_a für solche a auch differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antworten. Sie dürfen dafür das Ergebnis der Teilaufgabe (b) verwenden.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3: (4 + 3 + 3 = 10 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Wert der Integrale

(i) $\int_4^{16} \frac{1}{\sqrt{t}(1-\sqrt{t})}\, \mathrm{d}t$ und

(ii) $\int_0^{\pi} e^{-t}\cos(2t)\, \mathrm{d}t$.

(b) Untersuchen Sie das folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(t)\ln(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die folgende Aussage verwenden: Für jedes $\alpha > 0$ ist die Abbildung $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^\alpha}$ auf $[1, \infty)$ beschränkt.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{-y(x)}\sin(x), \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (4 + 6 = 10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y''(x) + y'(x) - 2y(x) &= e^{-x}, \\ y(0) = y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

(b) Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ \alpha+4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von α) alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

- Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **19.10.2017** im Internet, sowie durch Aushang am schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 des Gebäudes 20.30 bekannt gegeben.
- Einsichtnahme in die korrigierten Bachelor-Modulprüfungen findet am Mittwoch, den **25.10.2017**, zwischen **16:00** und **18:00** im Hörsaal am Fasanengarten statt.
- Mündliche Nachprüfungen finden in der Woche vom **30.10.** bis **03.11.2017** im Gebäude 20.30 statt.