Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark

WS2017/18
17.09.2018

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Klausur

Aufgabe 1: (5 + 5 + 5 + 5 = 20 Punkte)
Zeigen Sie:

(a) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

(b) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n > n_0$ gilt $2^n \geq n^2$. Finden sie die kleinste natürliche Zahl n_0 so, dass die Aussage wahr ist.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ist $8^n - 3^n$ durch 5 teilbar.

(d) Sei $a, b \geq 0$ und $0 \leq s \leq 1$, dann gilt $(a+b)^s \leq a^s + b^s$.
Hinweis: $a^s = \frac{a}{a^{1-s}}$.

Aufgabe 2: (5 + 5 + 5 + 5 = 20 Punkte)

(a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil und die Polardarstellung von $(1+i)\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$ und $\exp\left(4+i\frac{\pi}{3}\right)\exp\left(-2+i\frac{11\pi}{6}\right)$.

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3-(3-\mathrm{i})z^2-\mathrm{i}z+1+3\mathrm{i}=0$.
Hinweis: Es gibt eine Lösung z mit $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$.

(c) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene

  (i) $A = \{z \in \mathbb{C} |\, |z-\mathrm{i}| \geq 1 \wedge |z-1-2\mathrm{i}| < 3\}$,

  (ii) $B = \left\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z^2) \leq 1\right\}$.

Aufgabe 3: (5 + 5 + 5 + 5 = 20 Punkte)

(a) Sei $0 \leq a < 1$ fest. Untersuchen Sie die Funktionenfolge (h_n) mit $h_n : [a,1] \to \mathbb{R}$ $h_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x}$ für alle $x \in [a,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie den Wert:

  (i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$,

  (ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

(c) Finden Sie eine Reihe, die nur für $x \in [-1, 4)$ konvergent ist.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 4: ($5 + 5 + 5 + 5 = 20$ Punkte)

(a) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Gleichungen (ausgehend von der Definition):

(i) $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

(ii) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

(i) $\int_1^\infty \frac{1+\frac{1}{2}(\cos x)^{2018}}{x} dx$,

(ii) $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x^2} dx$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:
Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Dienstag, den **16.10.2018**, neben Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) veröffentlicht.
Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **18.10.2018**, von **16 bis 18 Uhr** in der **Hörsaal Neue Chemie (Geb. 30.46)** statt.
Die mündlichen Nachprüfungen finden in der Woche von 22.10. bis 27.10 statt.