Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger

SS 2019
06.09.2019

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (7+6+7=20 Punkte)

a) Es sei $p_1(z) = 1 + z$ und $p_{n+1}(z) = (1 + z^{(2^n)}) \cdot p_n(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{2^n-1} z^k.$$

b) Sei die Folge (a_n) definiert durch

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = a_n(2 - a_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(2 - x)$ auf ihr Maximum, um die Beschränktheit der Folge nach oben zu zeigen.

c) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

Aufgabe 2 (6+7+7=20 Punkte)

a) Die Funktion $f := \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2} & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \\ \frac{4x-6}{x+1} & , x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

b) Untersuchen Sie die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, auf lokale und globale Extrema und geben Sie diese an.

c) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & , x \neq 0, \\ 1 & , x = 0. \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar ist und berechnen Sie $g^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

— bitte wenden —

AUFGABE 3 (8+5+7=20 PUNKTE)

a) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und berechnen Sie f' (der Reihenwert muss nicht berechnet werden).

b) Zeigen Sie, dass

$$\log(1 + x) \leqslant \sqrt{x}$$

für $x > 0$.

c) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} x e^{(-x^2)} \int_0^x e^{(t^2)}\, dt.$$

AUFGABE 4 (8+5+7=20 PUNKTE)

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertsproblems

$$y' = 2ty + t^3, \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

b) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)}\, dx.$$

c) Gegeben sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 10 & 15 \\ 8 & 19 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie je eine Basis von Bild(A) und Kern(A).

VIEL ERFOLG!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab dem **14.10.2019**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 im Mathematik-Gebäude 20.30 aus.

Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den **17.10.2019**, von 16 bis 18 Uhr in Daimler Hörsaal (Geb. 10.21) statt.

Die mündlichen Nachprüfungen sind vom **21.10.2019** bis **31.10.2019**.