HM 1 Physik – Lösung

Aufgabe 1

a) <u>IA</u>: $p_1(z) = 1+z = \sum_{k=0}^{1} z^k = \sum_{k=0}^{2^1-1} z^k$

<u>IS</u>: Beh. gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$p_{n+1}(z) = (1+z^{2^n})\,p_n(z) \overset{(IV)}{=} (1+z^{2^n}) \sum_{k=0}^{2^n-1} z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{2^n-1} z^k + \sum_{k=0}^{2^n-1} z^{2^n+k}$$

$$\overset{l=2^n+k}{=} \sum_{k=0}^{2^n-1} z^k + \sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} z^l = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} z^k.$$

b) Setze $f(x) := x(2-x)$. Es gilt

$$f'(x) = 2(1-x) \overset{!}{=} 0 \iff x = 1$$

Wegen $f(x) \longrightarrow -\infty$ für $x \longrightarrow \pm\infty$, ist $f(1) = 1$ das globale Maximum von f. Wegen $a_1 \leq 1$ und $a_{n+1} = f(a_n)$ gilt also $a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Daraus folgt ebenfalls $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

<u>IA</u>: Nach Vor. gilt $a_1 = \frac{1}{2}$

<u>IS</u>: Es gelte $a_n \geq 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$a_{n+1} = \underbrace{a_n}_{\geq 0} \underbrace{(2-a_n)}_{\geq 2-1\cdot 1 = 1} \geq 0$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt außerdem

$$a_{n+1} = a_n(2-a_n) \overset{a_n \geq 0}{\geq} a_n(2-1) = a_n$$

Somit ist (a_n) beschränkt und monoton, also konvergent.

Durch Grenzwertbildung auf beiden Seiten der Rekursion folgt für den Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n(2-a_n) = a(2-a)$$

$$\iff a^2 = a \iff a \in \{0, \pm 1\}$$

Wegen $a_n \geq a_1 = \frac{1}{2}$ folgt auch $a \geq \frac{1}{2}$, also $a = 1$.

c) Sei $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Es gilt

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

womit die Reihe nach dem Minorantenkriterium nicht abs. konv. ist.

Da $a_n \geq 0$ und $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = a_{n+1}$ ist die Reihe nach dem Leibnitzkriterium konvergent.

Aufgabe 2

a) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ist f als Komposition stetiger Fkt. stetig in x. Dort gilt außerdem

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x}{x-2}$$

Somit existiert $\lim_{x\to 2} f(x)$ nicht, womit f dort nicht stetig ist. Für $x_0 \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{x_0}{x_0-2} \overset{!}{=} \frac{4x_0-6}{x_0+1} = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + x_0 = (4x_0-6)(x_0-2) = 4x_0^2 - 14x_0 + 12$$

$$\Leftrightarrow 3x_0^2 - 15x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 5x_0 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 1; 4$$

Somit ist f stetig in $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \{1, 4\}$.

b) Wegen $f(x) = e^{\log(x)\cdot\frac{1}{x}}$ gilt $f'(x) = x^{1/x}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\log(x)\right)$ und somit $f'(x) = 0$ genau für $x = e$.

Wegen $f(e) = e^{1/e} > 1$, $\log(x)\cdot\frac{1}{x} \longrightarrow -\infty$ (also $f(x) \to 0$) für $x \to 0+$ und

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \quad \left(\text{also } \lim_{x\to\infty} f(x) = e^0 = 1\right)$$

ist e ein lokales und globales Maximum.

c) Für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k}$$

Da diese Potenzreihe auch für $x = 0$ definiert ist und den Wert 1 annimmt, gilt $g \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Koeffizient vor x^n ist laut Vorlesung gerade $\frac{1}{n!} g^{(n)}(0)$, also folgt

$$g^{(n)}(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2k+1}, & n = 2k \ (k \in \mathbb{N}_0) \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Aufgabe 3

a) Wegen $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig gegen f. Außerdem gilt

$$f_n'(x) = -\frac{2x}{(n^2+x^2)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und somit wegen $|x| \leq 1 + x^2 \leq n^2 + x^2$, dass

$$|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

sodass auch $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ gleichmäßig konvergiert. Nach VL gilt daher

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{(n^2+x^2)^2}.$$

b) Setze $f(x) = \sqrt{x} - \log(1+x)$ für $x \geq 0$. Es gilt $(x>0)$

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi)\cdot x \quad \text{für ein } \xi \in (0,x) \quad (*)$$

nach dem MWS., wobei für $\xi > 0$

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} - \frac{1}{1+\xi} = \frac{1+\xi-2\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}(1+\xi)} = \frac{(1-\sqrt{\xi})^2}{2\sqrt{\xi}(1+\xi)} \geq 0$$

Somit folgt aus (*), dass $f(x) \geq 0$ für $x>0$, also die Beh.

c) Wir betrachten

$$\lim_{x\to\infty} x e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt = \lim_{x\to\infty} \frac{x\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}}$$

$$\overset{\text{L'H}}{\underset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt + xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} \overset{\text{L'H}}{\underset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}+e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{1+2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+2} = \frac{1}{2},$$

wobei wir den Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung verwendet haben.

Aufgabe 4

a) Es handelt sich um die lineare DGL 1. Ordnung

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

mit $a(t) = 2t$, $b(t) = t^3$. Es folgt zunächst

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds = \int_0^t 2s\,ds = t^2$$

und daher

$$\int_0^t e^{-A(s)} b(s)\,ds = \int_0^t e^{-s^2}\cdot s^3\,ds = \int_0^t \underbrace{-2se^{-s^2}}_{u'}\cdot\underbrace{\left(-\frac{s^2}{2}\right)}_{v}ds$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} \left[-\frac{s^2}{2}e^{-s^2}\right]_0^t + \int_0^t se^{-s^2}\,ds$$

$$= \left[\left(-\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2}\right)e^{-s^2}\right]_0^t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t^2+1)e^{-t^2}$$

Insgesamt ergibt sich also für die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{A(t)} + e^{A(t)}\int_0^t e^{-A(s)}b(s)\,ds = e^{t^2} - \frac{1}{2}(t^2+1).$$

b) Die Substitution $t = \cos(x)$ ergibt $\frac{dt}{dx} = -\sin(x)$, daher

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = -\int_{+1}^{-1} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \Big[\arctan(t)\Big]_{-1}^{1} = \arctan(1) - \arctan(-1)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

c) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 10 & 15 \\ 8 & 19 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ (-1) \\ (-8) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -11 \\ 0 & -1 & 7 & 11 \\ 0 & 3 & -21 & -33 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ (-3) \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit sind die ersten beiden Zeilen l.u. und damit

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \\ -11 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von Bild A. Mit dem (-1)-Trick folgt, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ -11 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von Kern A ist.