Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
Modulprüfung

Aufgabe 1 ((7 + 7) + 6 = 20 Punkte).

(a) (i) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$a_n = \prod_{k=1}^{n}\Big(1 + \frac{2}{k}\Big).$$

Zeigen Sie, dass $a_n = (n+1)(n+2)/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Die Glieder der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert als

$$b_n = 2^{(-1)^n(n+1)} - 2^{(-1)^{n+1}n}.$$

Zeigen Sie, dass $b_{2n} \to \infty$ und $b_{2n-1} \to -\infty$ für $n \to \infty$.

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2} z^n?$$

Aufgabe 2 ((5 + 5) + (5 + 5) = 20 Punkte).

(a) Es seien für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n\colon (0,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1+nx} \quad \text{und}$$
$$g_n\colon (0,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{1+nx}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ auf $(0,1)$ *punktweise* gegen eine Funktion $f\colon (0,1) \to (0,1)$ konvergiert. Bestimmen Sie f.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ auf $(0,1)$ *nicht gleichmäßig* gegen f aus Teil (i) konvergiert.

(iii) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ auf $(0,1)$ *punktweise* gegen eine Funktion $g\colon (0,1) \to (0,1)$ konvergiert. Bestimmen Sie g.

(iv) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ auf $(0,1)$ *gleichmäßig* gegen g aus Teil (iii) konvergiert.

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, sofern existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{2^x - 1}$.

(ii) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \left(\dfrac{1}{x^2 - 3} - \dfrac{13}{(x^2 - 3)(x^4 + 4)} \right)$.

Aufgabe 3 ((6 + 6) + 8 = 20 Punkte).

(a) Berechnen Sie, sofern existent, die folgenden uneigentlichen Integrale.

(i) $\displaystyle\int_0^\infty (\sin(x))^3 \cos(x)\, dx$.

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x}\, dx$.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x \sinh(x^2) - x^2 \cosh(x), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

differenzierbar mit stetiger Ableitung ist, das heißt, dass $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Aufgabe 4 (10 + 10 = 20 Punkte).

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) &= \cos(x) \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie durch Matrixumformungen die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Viel Erfolg!