

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik Lösungsvorschlag zur Modulprüfung

Aufgabe 1 ((7 + 7) + 6 = 20 Punkte).

- (a) (i) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$a_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{2}{k}\right).$$

Zeigen Sie, dass $a_n = (n+1)(n+2)/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (ii) Die Glieder der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert als

$$b_n = 2^{(-1)^n(n+1)} - 2^{(-1)^{n+1}n}.$$

Zeigen Sie, dass $b_{2n} \rightarrow \infty$ und $b_{2n-1} \rightarrow -\infty$ für $n \rightarrow \infty$.

- (b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2} z^n?$$

Lösungsvorschlag.

- (a) (i) Wir zeigen die Gleichheit mit vollständiger Induktion. Für den Induktionsanfang sehen wir durch Einsetzen, dass

$$a_1 = \prod_{k=1}^1 \left(1 + \frac{2}{k}\right) = 1 + 2 = 3 = \frac{(1+1)(1+2)}{2}.$$

Es gelte nun also die Induktionsvoraussetzung

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach Definition und mithilfe der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{2}{k}\right) \\ &= \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{2}{k}\right) \\ &= \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n+1+2}{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
 &= \frac{(n+2)(n+3)}{2}.
 \end{aligned}$$

Damit ist die Gleichheit bewiesen.

(ii) Da $(-1)^n = 1$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ und $(-1)^n = -1$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$, folgt

$$b_n = 2^{(-1)^n(n+1)} - 2^{(-1)^{n+1}n} = \begin{cases} 2^{n+1} - 2^{-n} & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ gerade und} \\ 2^{-(n+1)} - 2^n & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Da $2^n, 2^{n+1} \rightarrow \infty$ und $2^{-(n+1)}, 2^{-n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, geht die obere Teilfolge für $n \rightarrow \infty$ gegen ∞ und die untere Teilfolge gegen $-\infty$.

(b) Wir zeigen, dass die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ konvergiert und sonst divergiert.

Es sei $c_n := (n + n^2)^{-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir berechnen mit dem Quotientenkriterium

$$\begin{aligned}
 \frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{n + n^2}{n + 1 + (n + 1)^2} \\
 &= \frac{n + n^2}{n + 1 + n^2 + 2n + 1} \\
 &= \frac{n + n^2}{n^2 + 3n + 2} \\
 &= \frac{1/n + 1}{1 + 3/n + 2/n^2} \\
 &\rightarrow 1
 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Somit ist der Konvergenzradius der Potenzreihe 1, also konvergiert die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$.

Für $|z| = 1$ berechnen wir

$$\left| \frac{1}{n + n^2} z^n \right| = \frac{1}{n + n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Potenzreihe also für $|z| = 1$. □

Aufgabe 2 ((5 + 5) + (5 + 5) = 20 Punkte).

(a) Es seien für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 f_n &: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1 + nx} \quad \text{und} \\
 g_n &: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1 + nx}.
 \end{aligned}$$

- (i) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ auf $(0, 1)$ *punktweise* gegen eine Funktion $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ konvergiert. Bestimmen Sie f .
- (ii) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ auf $(0, 1)$ *nicht gleichmäßig* gegen f aus Teil (i) konvergiert.
- (iii) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ auf $(0, 1)$ *punktweise* gegen eine Funktion $g : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ konvergiert. Bestimmen Sie g .
- (iv) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ auf $(0, 1)$ *gleichmäßig* gegen g aus Teil (iii) konvergiert.
- (b) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, sofern existent, die folgenden Grenzwerte.

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2^x - 1}$.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \left(\frac{1}{x^2 - 3} - \frac{13}{(x^2 - 3)(x^4 + 4)} \right)$.

Lösungsvorschlag.

- (a) (i) Wir setzen $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, $x \mapsto 0$. Sei $x_0 \in (0, 1)$. Dann gilt

$$f_n(x_0) = \frac{1}{1 + nx_0} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Das zeigt punktweise Konvergenz der Funktionenfolge gegen f .

- (ii) Wir setzen $x_n := 1/n$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left| \frac{1}{1 + n/n} - 0 \right| = \frac{1}{2}.$$

Somit konvergiert die Funktionenfolge nicht gleichmäßig gegen f .

- (iii) Wir setzen $g : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, $x \mapsto 0$. Sei $x_0 \in (0, 1)$. Dann gilt

$$g_n(x_0) = \frac{x_0}{1 + nx_0} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Das zeigt punktweise Konvergenz der Funktionenfolge gegen g .

- (iv) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für alle $n > 1/\varepsilon - 1$ und alle $x \in (0, 1)$

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \frac{x}{1 + nx} \right| \leq \frac{x}{x + nx} = \frac{1}{1 + n} < \varepsilon.$$

Somit konvergiert die Funktionenfolge gleichmäßig gegen g .

(b) (i) Zunächst gilt

$$\frac{e^x - 1}{2^x - 1} = \frac{e^x - 1}{e^{x \log(2)} - 1}.$$

Es seien $f(x) = e^x - 1$ und $g(x) = e^{x \log(2)} - 1$. Dann gilt $f'(x) = e^x$ und $g'(x) = \log(2)e^{x \log(2)}$. Zudem gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiter gilt $f(x) \rightarrow 0$ und $g(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\log(2)e^{x \log(2)}} = \frac{1}{\log(2)}$$

und somit nach der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{\log(2)}.$$

(ii) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^2 - 3} - \frac{13}{(x^2 - 3)(x^4 + 4)} \right) &= \frac{1}{x^2 - 3} \left(1 - \frac{13}{x^4 + 4} \right) \\ &= \frac{1}{x^2 - 3} \frac{x^4 + 4 - 13}{x^4 + 4} \\ &= \frac{1}{x^2 - 3} \frac{x^4 - 9}{x^4 + 4} \\ &= \frac{1}{x^2 - 3} \frac{(x^2 - 3)(x^2 + 3)}{x^4 + 4} \\ &= \frac{x^2 + 3}{x^4 + 4} \\ &\rightarrow \frac{\sqrt{3}^2 + 3}{\sqrt{3}^4 + 4} \\ &= \frac{6}{13} \end{aligned}$$

für $x \rightarrow \sqrt{3}$, da $(x^2 + 3)(x^4 + 4)^{-1}$ in $\sqrt{3}$ stetig ist. □

Aufgabe 3 ((6 + 6) + 8 = 20 Punkte).

(a) Berechnen Sie, sofern existent, die folgenden uneigentlichen Integrale.

(i) $\int_0^\infty (\sin(x))^3 \cos(x) dx.$

(ii) $\int_0^\infty x e^{-x} dx.$

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x \sinh(x^2) - x^2 \cosh(x), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

differenzierbar mit stetiger Ableitung ist, das heißt, dass $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Sei $a > 0$. Wir setzen $y(x) = \sin(x)$. Dann gilt $y'(x) = \cos(x)$ und somit mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_0^a (\sin(x))^3 \cos(x) dx &= \int_0^{\sin(a)} y^3 dy \\ &= \left[\frac{1}{4} y^4 \right]_{y=0}^{\sin(a)} \\ &= \frac{1}{4} (\sin(a))^4. \end{aligned}$$

Da $\sin(a)$ für $a \rightarrow \infty$ nicht konvergiert, existiert das uneigentliche Integral nicht.

(ii) Sei $a > 0$. Wir berechnen mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^a x e^{-x} dx &= [-x e^{-x}]_{x=0}^a - \int_0^a -e^{-x} dx \\ &= -a e^{-a} + [-e^{-x}]_{x=0}^a \\ &= -a e^{-a} - e^{-a} + 1. \end{aligned}$$

Nach Übungsaufgabe 3 (a) von Übungsblatt 9 konvergiert der erste Summand für $a \rightarrow \infty$ gegen 0. Ebenso konvergiert der zweite Summand für $a \rightarrow \infty$ gegen 0, sodass das uneigentliche Integral existiert und gleich 1 ist.

(b) Zunächst ist klar, dass die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}_+$ und auf $\mathbb{R}_-$ jeweils als Komposition von C^1 -Funktionen in $C^1(\mathbb{R}_+)$ und $C^1(\mathbb{R}_-)$ liegt mit

$$f'(x) = \sinh(x^2) + 2x^2 \cosh(x^2) - 2x \cosh(x) - x^2 \sinh(x)$$

für $x > 0$ und $f'(x) = 0$ für $x < 0$.

Wir zeigen nun die Differenzierbarkeit von f in 0. Hierzu betrachten wir den Differenzenquotienten von f in 0 und erhalten zum einen

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{0 - 0}{x} \rightarrow 0$$

für $x \rightarrow 0^-$ und zum anderen

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x \sinh(x^2) - x^2 \cosh(x) - 0}{x} = \sinh(x^2) - x \cosh(x) \rightarrow 0$$

für $x \rightarrow 0^+$. Somit ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

Um die Stetigkeit der Ableitung zu sehen, bemerken wir, dass

$$f'(x) = \sinh(x^2) + 2x^2 \cosh(x^2) - 2x \cosh(x) - x^2 \sinh(x) \rightarrow 0$$

für $x \rightarrow 0^+$ und $f'(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0^-$.

Somit ist

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sinh(x^2) + 2x^2 \cosh(x^2) - 2x \cosh(x) - x^2 \sinh(x), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

die stetige Ableitung von f und f somit stetig differenzierbar. □

Aufgabe 4 (10 + 10 = 20 Punkte).

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \cos(x)$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie durch Matrixumformungen die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag.

(a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wir berechnen zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Das zugehörige charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Dessen Nullstellen sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Somit setzen wir

$$\Phi_1(x) := e^{2x} \quad \text{und} \quad \Phi_2(x) := xe^{2x}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet also

$$\Phi_h(x) = c_1 \Phi_1(x) + c_2 \Phi_2(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

für noch zu bestimmende $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Es gilt in der Notation der Vorlesung, dass $\alpha = 0$ und $\beta = 1$. Da $\alpha + i\beta = i$ und $p(i) \neq 0$, gilt $\nu = 0$. Um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, wählen wir also den Ansatz

$$\Phi_p(x) = x^0 e^{0x} (d_1 \cos(x) + d_2 \sin(x)) = d_1 \cos(x) + d_2 \sin(x).$$

Es gilt

$$\Phi_p'(x) = -d_1 \sin(x) + d_2 \cos(x)$$

und

$$\Phi_p''(x) = -d_1 \cos(x) - d_2 \sin(x).$$

Somit muss für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Phi_p''(x) - 2\Phi_p'(x) + 2\Phi_p(x) &= \cos(x) \\ \Leftrightarrow (-d_1 - 4d_2 + 4d_1) \cos(x) + (-d_2 + 4d_1 + 4d_2) \sin(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

gelten. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$-d_1 - 4d_2 + 4d_1 = 1$$

und

$$-d_2 + 4d_1 + 4d_2 = 0,$$

also $d_1 = 3/25$ und $d_2 = -4/25$.

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$\Phi(x) = \Phi_h(x) + \Phi_p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{3}{25} \cos(x) - \frac{4}{25} \sin(x).$$

Um die Konstanten c_1 und c_2 zu bestimmen, differenzieren wir Φ , erhalten

$$\Phi'(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} - \frac{3}{25} \sin(x) - \frac{4}{25} \cos(x)$$

und berechnen

$$1 = \Phi(0) = c_1 + \frac{3}{25}$$

$$\Leftrightarrow c_1 = \frac{22}{25}$$

und

$$0 = \Phi'(0) = 2c_1 + c_2 - \frac{4}{25} = c_2 + \frac{8}{5}$$

$$\Leftrightarrow c_2 = -\frac{8}{5}.$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben als

$$\Phi(x) = \frac{22}{25}e^{2x} - \frac{8}{5}xe^{2x} + \frac{3}{25}\cos(x) - \frac{4}{25}\sin(x).$$

- (b) Wir formen die erweiterte Matrix $(A|b)$ durch die folgenden Schritte in Zeilenstufenform um:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 9 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot(-1)} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ | \cdot 1/4 \end{array} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \xrightarrow{\cdot(-1)} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{\cdot(-2)} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Somit ist die Lösung des Gleichungssystems gegeben durch $x = (-5, 3, 1)$. □