Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Nachklausur

Aufgabe 1 ((4+4) + 4 + 8 = 20 Punkte)

a) Entscheiden Sie ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert von:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, wobei $a_n = n\left(e^{-1/n} - 1\right)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x+\sin(x)}{x}$.

b) Geben Sie ein begründetes Beispiel für eine Folge, für welche die Menge der Häufungswerte abzählbar unendlich ist.

c) Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge in $\mathbb{R}$ mit

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ ist gerade,} \\ \frac{1}{n^2} & n \text{ ist ungerade.} \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert der Reihe.

Aufgabe 2 ((2+5+5) + 10 = 22 Punkte)

a) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2}e^x - x^2 \quad \forall x \in [0,1].$$

i) Begründen Sie, dass f auf $[0,1]$ sein Maximum annimmt, d.h. dass ein $x_0 \in [0,1]$ existiert mit

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in [0,1].$$

ii) Bestimmen Sie f' und zeigen Sie, dass f' genau eine Nullstelle $x_1 \in [0,1]$ besitzt.

iii) Zeigen Sie, dass f nur in x_1 sein Maximum auf $[0,1]$ annimmt.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = nx(1-x)^n$.
Zeigen Sie, dass die Funktionsfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ punktweise aber nicht gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

— bitte wenden —

Aufgabe 3 ((6+6) + 6 = 18 Punkte)

a) Beweisen oder widerlegen Sie die Konvergenz der folgenden uneigentlichen Integrale

i) $\int_0^\infty \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t}}\,dt$,

ii) $\int_0^\infty t^{2t} e^{-t}\,dt$.

b) Geben Sie die maximale Lösung des folgenden Anfangswertproblems an:

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x}, \quad y(1) = 1.$$

Aufgabe 4 (4 + (3+3+4) + 6 = 20 Punkte)

Es sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass A_α vollen Rang hat.

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass:

(i) $A_\alpha \vec{v} = \vec{b}$ nicht lösbar ist.

(ii) $A_\alpha \vec{v} = \vec{b}$ lösbar ist.

(iii) $A_\alpha \vec{v} = \vec{b}$ eindeutig lösbar ist.

(c) Sei nun $\alpha \notin \{0, 1, 2\}$. Bestimmen Sie alle Lösungen von $A_\alpha \vec{v} = \vec{b}$.

Viel Erfolg!