

Lösungsnotizen zur
HM 1 Nachklausur
SS23

Martin Schulz 

A1,

9) i) $a_n = n(e^{-1/n} - 1) = \frac{e^{-1/n} - 1}{1/n}$

Falls der Funktionsgrenzwert $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - 1}{t}$

ex. der gesuchte Grenzwert als Spezialfall.

Es ist für $g(t) := e^{-t}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = g'(0) = -1$$

Wobei der Grenzwert ex. da g in $t_0 = 0$ diff'bar mit

$$g'(0) = -e^{-t} \big|_{t=0} = -1$$

ii) Wir bestimmen den Funktionsgrenzwert.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin(x)}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$$

Nach den üblichen Grenzwertsätzen falls $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$ ex.

Dieser Grenzwert ex. denn

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

Damit ex. der Grenzwert mit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x} = 1$

b) Hierfür gibt es viele Beispiele. Das übliche Beispiel ist

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1 \ 12 \ 123 \ 1234 \ \dots \ \text{u.s.w.})$$

Jedes $m \in \mathbb{N}$ ist ein Häufungswert der Folge da eine Teilfolge ex. mit $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} = m \xrightarrow{k \rightarrow \infty} m$

Es ex. keine weiteren HW. Angenommen $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

und $\varepsilon := \min_{n \in \mathbb{N}} |a_n - r|$ dann ist $|a_n - r| > \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

und damit ist r kein HW von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Damit hat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abzählbar viele HW aber nicht überabzählbar viele.

(Weitere "abstrakte" Beispiele kann man mittels abzählungen von abzählbaren Mengen konstruieren z.B. der Abzählung von $\mathbb{Q}$)

⊆ Man erkennt, dass Leibniz nicht anwendbar ist, da die Folge nicht monoton fallend ist. Tatsächlich ist es das übliche Gegenbeispiel.

Es ist für $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n C_n = \sum_{k=1}^N (-1)^{2k} C_{2k} + \sum_{k=1}^N (-1)^{2k-1} C_{2k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k-1)^2}$$

$$\text{Es ist } \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k-1)^2} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

D.h. $\sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k-1)^2}$ ist monoton wachsend und beschränkt also konvergent. Es sei $C_0 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

$$\text{Es ist als } \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n C_n \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - C_0$$

und da $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$ div. als harmonische Reihe und damit

divergiert $\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n G_n$ nach dem Minorantenkriterium.

A2 i) f ist auf $[0,1]$ stetig und da $[0,1]$ kompakt nimmt f seine Maximum und Minimum an.

ii) $f'(x) = \frac{1}{2}e^x - 2x$

Es ist $f'(0) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$ und $f'(1) = \frac{1}{2}e - 2 > 0$

da f' stetig auf $[0,1]$ nimmt f' jeden Wert an, damit ex. ein $x_1 \in [0,1]$ mit $f'(x_1) = 0$.

Angenommen es ex. $x_2 \neq x_1$ mit $x_2 \in [0,1]$ dann ist

$$\frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

Nach dem Mittelwertsatz ex. ein $t \in [x_1, x_2] \subset [0,1]$ mit

$$f''(t) = 0. \text{ Allerdings gilt } f''(x) = \frac{1}{2}e^x - 2 < \frac{1}{2}e - 2 < 0$$

und damit kann kein solches x_2 ex.

iii) Nach ii) ist $x_1 \in [0,1]$ die einzige kritische Stelle in $[0,1]$.

Es ist $f''(x_1) < 0$ (s.o.) und damit handelt es sich

um ein lokales Maximum.

$$\text{Es ist } f'(x) = \frac{1}{2}e^x - 2x > 0 \text{ f\"ur } x \in [0, x_1)$$

$$\text{und } f'(x) = \frac{1}{2}e^x - 2x < 0 \text{ f\"ur } x \in (x_1, 1]$$

Ansonsten ex. $t \in [0,1]$ mit $f''(t) = 0$ was wir nach ii) ausgeschlossen haben.

Es ist also f auf $(x_1, 1)$ monoton wachsend und auf $(0, x_1)$ monoton fallend.

(Alternativ $f(0) = \frac{1}{2}$ und $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$ sowie $f(1) = \frac{1}{2}e^{-1} < \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$
 Damit ex. $x \in (0,1)$ mit $f(x) > \frac{1}{2}$ und damit ist das lokale
 Maximum $x_1 \in (0,1)$ das Maximum auf $[0,1]$)

6)

$$f_n(x) = nx(1-x)^n$$

Wir bestimmen zunächst den Punktweisen Grenzwert.

Es ist

$$\text{Falls } x=0 \Rightarrow f_n(0) \equiv 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ Falls } x=1 \Rightarrow f_n(1) \equiv 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sei nun $1-x=q \in (0,1)$, dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nx(1-x)^n &= (1-q) \lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = (1-q) \lim_{n \rightarrow \infty} ne^{\log(q^n)} \\ &= (1-q) \lim_{n \rightarrow \infty} ne^{n \log(q)} \\ &= \frac{1-q}{|\log(q)|} \lim_{n \rightarrow \infty} n |\log(q)| e^{-n |\log(q)|} \end{aligned}$$

Hier wurde $\log(q) < 0$ da $q \in (0,1)$ verwendet.

Es genügt also den Funktionsgrenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t}$
 zu untersuchen.

Es ist $e^{-t} < t^{-2}$ für t groß genug, denn

$$\begin{aligned} \log(e^{-t}) < \log(t^{-2}) &\Leftrightarrow -t < -2 \log(t) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{\log(t)}{t} \end{aligned}$$

Wobei $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1/t}{1} = 0$ nach der Regel von L'Hosp.

D.h für t groß genug ist $0 < te^{-t} < t t^{-2} = \frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

und damit $te^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Es ist also $\lim_{n \rightarrow \infty} nx(1-x)^n = 0$ für jedes $x \in [0,1]$

Wir zeigen nun, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht glm. konv.

Der punktweise Grenzwert ist $f = 0$ auf $[0,1]$

ist stetig. Es kommt nur diese Fkt. als Grenzwert in Frage. Beachte es ist

$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \max_{x \in [0,1]} n x (1-x)^n$$

Beachte das Supremum ist ein Maximum, da f_n auf $[0,1]$ stetig ist.

Wir wählen $x_n = \frac{1}{n}$ dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0,1]$

$$\text{Es ist } \|f_n - f\|_\infty \geq n \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} = \frac{1}{e} > 0$$

Daher ist die Konvergenz nicht gleichmäßig

A3 a) i) Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ ex. falls

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_r^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \text{ und } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \text{ ex.}$$

Es gilt $e^{-t} < 1$ für $t > 0$,

$$\Rightarrow \int_r^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt < \int_r^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t} \right]_r^1 = 2 - 2\sqrt{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 2$$

Damit konv. das uneig. Integral $\int_r^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ nach dem Majorantenkrit.

Es gilt $\frac{1}{\sqrt{t}} < 1$ für $t \geq 1$,

$$\Rightarrow \int_1^R \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \leq \int_1^R e^{-t} dt = \left[\frac{e^{-t}}{-1} \right]_1^R = \frac{1}{e} - e^{-R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$$

Damit konv. das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ nach dem Majorantenkriterium also auch das ursprüngliche Integral.

ii) $\int_0^{\infty} t^{2t} e^{-t} dt$ ex. falls das Integral $\int_3^{\infty} e^{-t} t^{2t} dt$ ex.

Es ist $t^{2t} = e^{\log(t^{2t})} = e^{2t \log(t)}$ und damit

$$e^{-t} t^{2t} = e^{2t \log(t) - t} = e^{t(2 \log(t) - 1)}$$

$$t(2 \log(t) - 1) \geq t \quad \stackrel{t > 0}{\Leftrightarrow} \quad 2 \log(t) - 1 > 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \log(t) > 2$$

$$\Leftrightarrow \log(t) > 1$$

$$\Leftrightarrow t > e \quad \Leftrightarrow t \geq 3$$

Damit ist $e^{-t} t^{2t} > e^t$ für $t \geq 3$ und damit

$$\int_3^R e^{-t} t^{2t} dt \geq \int_3^R e^t dt = [e^t]_3^R \quad \text{divergiert für } R \rightarrow \infty$$

Wir folgern, dass $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{2t} dt$ nach dem Minorantenkrit divergiert.

b) Es handelt sich um eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung mit Anfangswert, welches wir mittels der Methode der Trennung der Variablen lösen können.

$$y'(x) = -\frac{1}{x} y(x)$$

Nach der Methode "TdV" muss

$$\ln(y(x)) = -\int \frac{1}{x} dx + C_0 = -\ln(x) + C_0$$

für eine noch zu bestimmende Konstante C_0 gelten.

$$\Rightarrow y(x) = e^{-\ln(x) + C_0} = A \frac{1}{x}$$

Dies löst die DGL, denn $y'(x) = -\frac{A}{x^2}$ und wegen $y(1) = 1$ muss $y(1) = A = 1$ gelten.

A4,

a) Wir bestimmen den Rang der Matrix. Hierzu verwenden wir den Gauß-Algorithmus.

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_2 - R_3}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha-1 \\ 0 & \alpha-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 - (\alpha-1) \\ 0 & 0 & 1 - (\alpha-1)^2 \\ 0 & 1 & \alpha-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-\alpha \\ 0 & 1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & \alpha(\alpha-2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\alpha-1)^2 &= \alpha^2 - 2\alpha + 1 \\ &= \alpha(\alpha-2) + 1 \end{aligned}$$

Falls $\alpha \in \{0, 2\}$ dann $\text{Rang}(A_\alpha) = 2$. Falls $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ dann hat A_α vollen Rang.

b) i) + ii) Falls $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ dann ist $\text{Bild}(A_\alpha) = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und damit ist das Gleichungssystem lösbar. Desweiteren ist die lineare Abbildung $x \mapsto A_\alpha x$ in diesem Fall injektiv und daher ist die Gleichung eindeutig lösbar.
Falls $\alpha = 2$ dann ist

Falls $\alpha=2$ dann ist

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{Rang}(A_2) = 2 < 3$$

Wir untersuchen die erweiterte Matrix

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Damit ist das LGS lösbar mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 + v_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_1 = -1, v_2 + v_3 = 1 \Rightarrow v_1 = -1$
 $v_2 = 1 - v_3$

Damit ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ eine Lösung

der Gleichung $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1-\lambda+\lambda \\ -1+2-2\lambda+2\lambda \\ -1+2-2\lambda+2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Damit ist das LGS lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

Falls $\alpha=0 \Rightarrow A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Wir untersuchen die erweiterte Matrix

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \cdot (-1) \\ R_2 + R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich nicht lösbar. D.h. $A \cdot v = b$ hat keine Lösung.

Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$. Wir bestimmen die Allgemeine Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir untersuchen die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha-1 & 1 \end{array} \right) \quad |(\alpha-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & (\alpha-1)^2 & \alpha-1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (\alpha-1)^2 - 1 & \alpha-2 \end{array} \right)$$

Das LGS ist in Treppenform. Wir können nun lösen

$$[(\alpha-1)^2 - 1]v_3 = \alpha-2 \Rightarrow [\alpha^2 - 2\alpha + 1 - 1]v_3 = \alpha-2$$

$$\Rightarrow \alpha(\cancel{\alpha-2})v_3 = \cancel{\alpha-2} \cdot 1$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{1}{\alpha}$$

$$(\alpha-1)v_2 + v_3 = 1 \Rightarrow (\alpha-1)v_2 = 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{1}{\alpha}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_1 + \frac{2}{\alpha} = 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{2}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist die eindeutige Lösung für } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\}.$$

