UNIVERSITÄT KARLSRUHE **19.03.2004**
MATHEMATISCHES INSTITUT I **Frühjahr 2004**

DIPLOM–VORPRÜFUNG

zur Höheren Mathematik für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1. KLAUSUR

1. Aufgabe (10 Punkte):

Im $\mathbb{R}^3$ sind die Gerade

$$g\,:\,\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\quad,\quad\lambda\in\mathbb{R}\,,$$

und der Punkt $C(-1,0,-2)$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die g und C enthält.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks D mit den Eckpunkten $A(1,1,0)$, $B(3,1,-1)$ und $C(-1,0,-2)$. Wie groß ist der Abstand von C zu g?

c) Durch

$$h_t\,:\,\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-12\\t\\3t^2\end{pmatrix}\quad,\quad\mu\in\mathbb{R}\,,$$

ist im $\mathbb{R}^3$ die vom reellen Parameter t abhängige Gerade h_t definiert.
Bestimmen Sie alle $t\in\mathbb{R}$, für die g und h_t windschief sind.

d) Sei nun $t=2$. Bestimmen Sie den Abstand zwischen g und h_2.

2. Aufgabe (10 Punkte):

Für

$$0\le a\le\frac{1}{4}$$

ist die Folge (x_n) rekursiv durch

$$x_0=a\quad,\quad x_{n+1}=a+x_n^2\qquad(n=0,1,2,\ldots)$$

definiert.

a) Zeigen Sie für $n=0,1,2,\ldots$ die Gültigkeit der Ungleichung

$$0\le x_n\le x_{n+1}\le\frac{1}{2}\,.$$

b) Begründen Sie, warum (x_n) konvergent ist.

c) Berechnen Sie

$$x:=\lim_{n\to\infty}x_n\,.$$

– bitte wenden –

3. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben ist die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}\, x^{n-2} .$$

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius r dieser Potenzreihe.

b) Bestimmen Sie im Intervall $(-r, r)$ die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, für die

$$F(0) = 0$$

gilt.

c) Stellen Sie $F(x)$ mit Hilfe der Exponentialfunktion in geschlossener Form dar.

d) Geben Sie nun $f(x)$ in geschlossener Form an, und berechnen Sie $f(0)$.

4. Aufgabe (10 Punkte):

Es ist

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin x}{\sqrt{x^3}}\, dx .$$

a) Bestimmen Sie alle Stellen, an denen I uneigentlich ist.

b) Entscheiden Sie, ob I konvergiert oder divergiert. Begründen Sie Ihre Antwort genau!

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Donnerstag, dem 1. April, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-f.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, dem 20. April, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt. Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 26. bis 30. April.