Lösungen zu 1. Klausur VD Frühjahr 2004

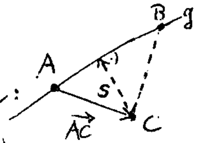
① Gerade: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Punkte: $A(1,1,0) \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$B(3,1,-1) \Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$

$C(-1,0,-2) \Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}$

a) Schematische Darstellung zur Veranschaulichung:



Die gesuchte Ebene hat den Aufpunkt $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und die Spannvektoren $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ sowie $\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Ebenengleichung in Parameterform:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}, \quad \mu, \tau \in \mathbb{R}$$

Ein Normalenvektor an diese Ebene ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\6\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{1+36+4} = \sqrt{41}$$

$\Rightarrow$ Ein Normaleneinheitsvektor: $\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix}-1\\6\\-2\end{pmatrix}$

Normalenform d. Ebene: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix}-1\\6\\-2\end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{41}} \vec{x} \cdot \begin{pmatrix}-1\\6\\-2\end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{41}} \quad \text{bzw} \quad \frac{-x+6y-2z-5}{\sqrt{41}} = 0$$

Wegen $\frac{5}{\sqrt{41}} > 0$ und da mit einem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0$ gerechnet wurde, ist dies die Hesse-Normalform von E.

b) Für den Flächeninhalt von D gilt (vgl. Skizze):

(1) $|D| = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix} \right| \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{2}\sqrt{41}$

Bezeichnet man den Abstand von C zu g mit s, so gilt für diesen Flächeninhalt auch:

(2) $|D| = \frac{1}{2}$ Grundseite $\cdot$ Höhe $= \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot s$ wobei $|\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

Aus (1)=(2) folgt: $s = \frac{\sqrt{41}}{|\vec{AB}|} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{5}}$

c) Weitere Gerade mit reellem Parameter t:

$$h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-12\\t\\3t^2\end{pmatrix}$$

h_t und g sind auf jeden Fall windschief, d.h. sie schneiden sich nicht, wenn sie nicht in einer Ebene liegen. Untersuche d. entgegengesetzten Fall: Für welche t liegen h_t und g in einer Ebene, so daß sie evtl. nicht windschief sind?

Da der Punkt $\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}$ sowohl auf h_t als auch in E liegt, liegt h_t genau dann in E, wenn wenn der Richtungsvektor $\begin{pmatrix}-12\\t\\3t^2\end{pmatrix}$ von h_t und der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\6\\-2\end{pmatrix}$ von E orthogonal sind.

$$\Leftrightarrow 0 = \begin{pmatrix}-12\\t\\3t^2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\6\\-2\end{pmatrix} = 12 + 6t - 6t^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + t - t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} +2 \\ -1 \end{cases}$$

Also: h_t und g sind genau dann windschief, wenn $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ gilt.

Denn die Betrachtung der restlichen beiden Fälle, d.h. wenn h_t und g in einer Ebene liegen, zeigt:

$\boxed{t=-1}$: $h_{-1}: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-12\\-1\\3\end{pmatrix}$ ist nicht parallel zu g $\Rightarrow h_{-1}, g$ schneiden sich und sind somit nicht windschief

$\boxed{t=+2}$ $\quad h_{+2}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -12 \\ +2 \\ 12 \end{pmatrix}$ ist nicht parallel zu $g \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ nicht windschief

d) Wir haben in c) gesehen, daß h_2 und g in eine Ebene liegen, wobei sie nicht parallel sind. Somit schneiden sie sich...

$\Rightarrow$ g und h_2 haben den Abstand 0

② $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$, $x_0 = a$

$x_{n+1} = a + x_n^2$ mit $n \in \mathbb{N}_0$

a) z.z.: $0 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

- $\boxed{0 \leq x_n}$

Beweis durch vollst. Induktion:

Ind. Anfang: $x_0 = a \overset{\text{s.o.}}{\geq} 0$ stimmt

Ind. Voraussetzung: $x_n \geq 0$ stimmt für ein $n \in \mathbb{N}_0$

Ind. Schluß $n \rightsquigarrow n+1$

$$x_{n+1} = a + x_n^2 \overset{\text{I.V.}}{\geq} a + 0 \geq 0 \quad \text{ok.}$$

- Monotonie: $\boxed{x_n \leq x_{n+1}}$, d.h. (x_n) wächst monoton

Beweis durch vollst. Induktion:

Ind. Anfang: $x_0 = a$, $x_1 = a + a^2 \Rightarrow x_1 - x_0 = a^2 \geq 0$

$\Rightarrow x_0 \leq x_1$ stimmt

Ind. Voraussetzung: $x_n \leq x_{n+1}$ stimmt für ein $n \in \mathbb{N}_0$

Ind. Schluß: $n \rightsquigarrow n+1$

$$x_{n+2} = a + x_{n+1}^2 \overset{\text{I.V.}: \; x_{n+1} \geq x_n \overset{x_n \geq 0 \text{ (s.o.)}}{\Longleftrightarrow} x_{n+1}^2 \geq x_n^2}{\geq} a + x_n^2 = x_{n+1} \quad \text{ok.}$$

- $\boxed{x_n \leq \frac{1}{2}}$

Beweis durch vollst. Induktion:

Ind. Anfang: $x_0 = a \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ stimmt

Ind. Voraus.: $x_n \leq \frac{1}{2}$ stimmt für ein $n \in \mathbb{N}_0$

Ind. Schluß: $x_{n+1} = a + x_n^2 \overset{\text{I.V. und } a \leq \frac{1}{4}}{\leq} \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ok.

b) Nach a) ist (x_n) monoton wachsend und nach oben durch $\frac{1}{2}$ beschränkt. Damit ist die Folge konvergent. (Konvergenzsatz für monotone Folgen, Satz 8.24 im Skript)

c) Es gilt $x := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$

Also: $x_{n+1} = a + x_n^2 \xrightarrow{n\to\infty} x = a + x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - x + a = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$

Wegen $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ folgt: $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4a}$

③ $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n-1}{n!} x^{n-2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{(n+2)!} x^n =: \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n := \dfrac{n+1}{(n+2)!}$

a) Konvergenzradius: Bestimmung mit Hilfe des Quotientenkriteriums:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{n+1}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+3)!}{n+2}\right| = \frac{(n+1)(n+3)}{n+2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty . \quad \text{Also: } r = \infty$$

$\Rightarrow f$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Aus $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{(n+2)!} x^n$ folgt nach Integration (gliedweise Integration erlaubt, da es sich bei f um eine Potenzreihe handelt und daher innerhalb des Konvergenzradius' gleichmäßige Konvergenz vorliegt)

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^{n+1} + c$$

Wegen $0 \overset{!}{=} F(0) = 0 + c$ muß gelten: $c = 0$

Als lautet die gesuchte Stammfunktion: $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)!} x^{n+1}$

c) $F(x) \overset{x \neq 0}{=} \dfrac{1}{x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)!} x^{n+2} = \dfrac{1}{x} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n!} x^n$

$$= \frac{1}{x}\left(e^x - 1 - x\right) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - 1$$

Also:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x=0, \\ \frac{1}{x}(e^x-1-x) & \text{, falls } x \neq 0 . \end{cases}$$

d) Für $x \neq 0$ gilt:

$$f(x) = F'(x) = -\frac{1}{x^2}(e^x-1-x)+\frac{1}{x}(e^x-1) = \frac{xe^x-x-e^x+1+x}{x^2} = \frac{1+(x-1)e^x}{x^2}$$

Für $x=0$ erhält man aus der Ausgangsreihe

$$f(0) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} 0^{n-2} = \frac{2-1}{2!} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \text{ , was}$$

mit
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1+(x-1)e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+(x-1)(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

oder auch:
$$f(0) = F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-x}{x^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

übereinstimmt!

(Klar, denn f bzw F sind als in Potenzreihen entwickelbare Funktionen unendlich oft stetig differenzierbar)

Also:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{, falls } x=0, \\ \frac{1+(x-1)e^x}{x^2} & \text{, falls } x \neq 0 . \end{cases}$$

④

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\sin x}{\sqrt{x^3}}\,dx \quad \text{mit dem Integranden } f(x) := \frac{e^{-x}\sin x}{\sqrt{x^3}}$$

a) Teile auf: $I = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{e^{-x}\sin x}{\sqrt{x^3}}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}\sin x}{\sqrt{x^3}}\,dx$

$\Rightarrow$ kritische Stellen:
- $x=0$, da dort der Nenner verschwindet, d.h. Singularität des Integranden liegt vor (nicht hebbar...)
- $x\to\infty$, d.h. der Integrationsbereich ist unbeschränkt

$\boxed{x=0}$ Betrachte den Integranden $f(x)$ von I_1 für $x\to 0$:

$$\frac{e^{-x}\sin x}{x^{3/2}} = \frac{(1-x+o(x))(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))}{x^{3/2}} = \frac{x-x^2+o(x^2)}{x^{3/2}} = x^{-1/2}-x^{1/2}+o(x^{1/2})$$

$\Rightarrow$ Der Integrand verhält sich dort wie die Vergleichsfunktion $g(x) = x^{-1/2}$.

($g(x)$ ist tatsächlich Vergleichsfunktion, da $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{s.o.}}{=} \ldots = 1$)

Da $\int_0^1 x^{-1/2}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2$ und somit konvergent ist, konvergiert auch I_1.

$\boxed{x\to\infty}$ Betrachte den Integranden $f(x)$ von I_2 für $x\to\infty$:

$$0 \leq |f(x)| = \frac{e^{-x}|\sin x|}{\sqrt{x^3}} \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^3}} \leq e^{-x} ,$$

für $x \geq 1$, d.h. da ja $x\to\infty$ betrachtet wird.

wobei $\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_1^{\infty} = 0+\frac{1}{e}$ und somit konvergiert.

$\Rightarrow \int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$ ist eine konvergente Majorante von $\int_{-1}^{\infty} |f(x)|\,dx$, d.h. I_2 konvergiert nach dem Majorantenkriterium.

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{I = I_1 + I_2 \text{ ist konvergent}}}$