

Aufgabe 1

$$a) \quad z = \frac{2}{\sqrt{3} + i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} : \operatorname{Re}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{2}, |z| = 1$$

$$\arg(z) = -\frac{\pi}{6} \quad | = \frac{11}{6}\pi$$

$$b) \quad \text{Nach a) ist } z = e^{-i\frac{\pi}{6}}, \text{ also } z^n = e^{-in\frac{\pi}{6}} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$z^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z^n) = \sin n\frac{\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow n\frac{\pi}{6} = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \underline{n = 6k} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$c) \quad 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Also: } (1 + i\sqrt{3})^m = (1 - i)^n \Leftrightarrow \underline{2^m e^{im\frac{\pi}{3}} = 2^{\frac{n}{2}} e^{-in\frac{\pi}{4}}} \quad (*)$$

$$\text{Bilde in } (*) \text{ den Betrag auf beiden Seiten } \rightarrow 2^m = 2^{\frac{n}{2}} : \underline{n = 2m} \quad (1)$$

$$\text{Von } (*) \text{ bleibt: } \frac{e^{im\frac{\pi}{3}}}{e^{-in\frac{\pi}{4}}} = e^{-in\frac{\pi}{4}} \quad (1) \quad \underline{= e}$$

$$\Leftrightarrow e^{im\frac{5}{6}\pi} = 1 \Leftrightarrow im\frac{5}{6}\pi = i2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \underline{m = \frac{12}{5}k} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Es sollen $m, n \in \mathbb{N}$ und minimal sein:

$$\underline{m = 12} \quad \text{und (mit (1))} \quad \underline{n = 24}$$

Aufgabe 2: a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{7}{5}\}, f'(x) = -\frac{5}{(5x+7)^2}$

a) $f(x) = \frac{1}{7(1+\frac{5}{7}x)} = \frac{1}{7} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{5}{7}\right)^k x^k, |x| < \frac{7}{5}$

$r = \frac{7}{5}$

c) $f(x) = \frac{1}{12} \frac{1}{1+\frac{5}{12}(x-1)} = \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{5}{12}\right)^k (x-1)^k$
 $(|x-1| < \frac{12}{5})$

d) a) $\rightarrow g(x) = -\frac{1}{5} f'(x)$

c) $= -\frac{1}{60} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{5}{12}\right)^{k+1} (k+1) (x-1)^k$

Nach Vorlesung ist r dasselbe wie für f : $r = \frac{12}{5}$

Konvergenz genau für die x mit $|x-1| < \frac{12}{5}$
 (geom Reihe)

e) Mit $\frac{1}{k!} g^{(k)}(1) = -\frac{1}{60} (-1)^{k+1} \left(\frac{5}{12}\right)^{k+1} (k+1)$ hat man

$g^{(25)}(1) = -\frac{1}{60} (26!) \left(\frac{5}{12}\right)^{26}$

Aufgabe 3

- a) A_t und B_t liegen in der (x, y) -Ebene. Sie liegen auf der Geraden g_t mit der Gleichung $x + ty = 2t + 2$.

Eine Gleichung der Ebene E_t ist dann: $x + ty + 0z = 2t + 2$ ($t > 0$)

$$b) \|A_t B_t\| = \|A_t C\| \Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} 2t+2 \\ -2-\frac{2}{t} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 2t+2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$\Leftrightarrow 4(t+1)^2 = 9t^2 \xrightarrow{t>0} 2(t+1) = 3t \Leftrightarrow t = 2$$

Das Dreieck $A_2 B_2 C$ ist in der geforderten Art gleichschenklig.

- c) $E_t \cap E_2$ ($t \neq 2$) ist die Gerade mit Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = g_t \cap g_2: \begin{cases} ty_0 + x_0 = 2t + 2 \\ 2y_0 + x_0 = 6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{t \neq 2} x_0 = y_0 = 2$$

Schnittgerade: $\vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$. Da von t unabhängig ist $\{E_t, t > 0\}$ ein Ebenenbüschel mit der gemeinsamen Geraden $E_t \cap E_2$ ($t \neq 2$).

- d) Spiegels $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der (x, y) -Ebene an g_2 . Elementar = geometrisch sieht man, dass $\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$ der Spiegelpunkt ist.

Der Spiegelpunkt von C an E_2 ist dann $\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4)a) Substituiere $t \rightarrow u = \sqrt{e^t - 1}$

$$\rightarrow e^t = 1 + u^2$$

$$\frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}} = 2 \frac{du}{1 + u^2} \quad (\rightarrow \int = 2 \arctan(u))$$

$\rightarrow$ Alle Stammfunktionen von $g(t)$ sind durch

$$G(t) = 2 \arctan(\sqrt{e^t - 1}) + c, \quad c \text{ konst} \in \mathbb{R}$$

gegeben.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{\ln 2}^x \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}} &= G(x) - G(\ln 2) \quad (\text{Hauptsatz}) \\ &= 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) - \frac{\pi}{2} \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \arctan(\sqrt{e^x - 1}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\rightarrow \sqrt{e^x - 1} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \underline{x = \ln 4}$$