Aufgabe 1

a)

Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ liefert

$$\lambda^7 + 8\lambda^4 = \lambda^4(\lambda^3 + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^4 = 0 \quad \vee \quad \lambda^3 = -8$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = -2 \quad \vee \quad \lambda = 2e^{\frac{\pi}{3}i} = 1+\sqrt{3}\,i \quad \vee \quad \lambda = 2e^{-\frac{\pi}{3}i} = 1-\sqrt{3}\,i$$

$\lambda = 0$ ist vierfache Nullstelle, alle anderen Nullstellen sind einfach. Somit ist die allgemeine reelle Lösung

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 e^{-2x} + c_6 e^x \cos(\sqrt{3}x) + c_7 e^x \sin(\sqrt{3}x)$$

mit $c_1, \dots, c_7 \in \mathbb{R}$.

b)

$$y' = x(1+y^2) \Rightarrow \frac{y'}{1+y^2} = x$$

$$\Rightarrow \arctan y = \tfrac{1}{2}x^2 + c$$

$$\Rightarrow y(x) = \tan\left(\tfrac{1}{2}x^2 + c\right)$$

$$y(-\sqrt{2\pi}) = 1 \Leftrightarrow \tan(-\pi + c) = 1$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Also $y(x) = \tan\left(\tfrac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$.

Aufgabe 2

a)

Parameterdarstellung von E:

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad s,t \in \mathbb{R}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\| \vec{n} \| = \sqrt{3}$

Also sind $\vec{a} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = -\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

zwei Vektoren der Länge 3, die auf E senkrecht stehen.

b)

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ Der Abstand d. Ursprungs von E beträgt $\frac{2}{\sqrt{3}}$ $= \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Es ist $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow P = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$

c)

Der Schnittwinkel beträgt $90°$.

d)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -8 & -6 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -18 & -18 \end{array}\right)$$

Somit $x_3 = 1$

$x_2 = -3 + 4 = 1$

$x_1 = 3 - 2 = 1$

Der Schnittpunkt ist $(1, 1, 1)$.

Aufgabe 3

a)

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{2n} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} (\ln 2n - \ln n) = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{2n}{n} = \ln 2$$

b)

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2\frac{x}{1-x} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

Somit $c_{100} = 2$.

c)

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad g''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\begin{aligned} x(xg'(x))' &= x^2 g''(x) + x g'(x) \\ &= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x^2 + x - x^2}{(1-x)^3} \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = f(x) \end{aligned}$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \implies g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\implies x g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

$$\implies (x g'(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$\implies f(x) = x(x g'(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

Somit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = f(\frac{1}{2}) = 6$.

Aufgabe 4

a)

Sei $f(y) = \tanh y$ und $g(y) = y$.

Dann gilt $f(0) = g(0)$ und für alle $y \geq 0$:

$$f'(y) = \frac{1}{\cosh^2 y} \leq 1 = g'(y)$$

Somit ist $0 \leq \tanh y \leq y$ für alle $y \geq 0$.

Aus Symmetriegründen folgt

$y \leq \tanh y \leq 0$ für alle $y \leq 0$.

Also gilt $|\tanh y| \leq |y|$ für alle $y \in \mathbb{R}$

und somit $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \leq |\frac{x}{n}|$. $\square$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\tanh(\tfrac{x}{n})|^2 \overset{a)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} |\tfrac{x}{n}|^2$$

$$= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$\Rightarrow$ Nach dem Majorantenkriterium Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$.

c)

$(f_n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ ist wegen a) eine monoton fallende Nullfolge. Somit konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium.