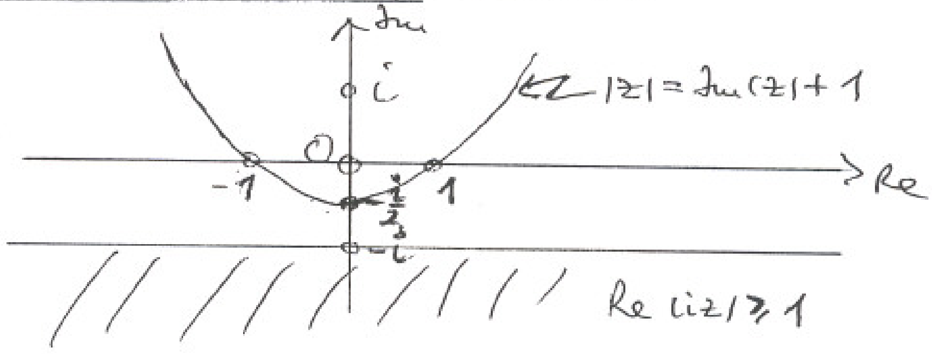
Aufgabe 1

a) Mit $z = x+iy$ ist $\mathrm{Re}(iz) = -y$. Durch $\mathrm{Re}(iz) \geq 1$ wird die Halbebene $\{z \mid \mathrm{Im}(z) \leq -1\}$ beschrieben.



Mit $z = x+iy$ und $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ besagt $|z| = \mathrm{Im}(z) + 1$

$x^2 = 2y+1$. Dies ist die oben eingezeichnete Parabel.

b) Schreibe $1+i\sqrt{3}$ in Polardarstellung: $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\varphi}$

mit $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$. Also

$(1+i\sqrt{3})^6 = 2^6 e^{i6\frac{\pi}{3}} = 2^6$: $\mathrm{Re}(1+i\sqrt{3}) = 2^6$, $\mathrm{Im}(1+i\sqrt{3}) = 0$,

$|1+i\sqrt{3}| = 2^6$

Es ist $\left|\frac{1+i}{1+2i}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} < 1$, somit konvergiert die Reihe:

$$a := \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{1+i}{1+2i}\right)^l = \frac{1}{1 - \frac{1+i}{1+2i}} - 1 - \frac{1+i}{1+2i} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i,$$

$\mathrm{Re}\, a = \frac{2}{5}$, $\mathrm{Im}\, a = -\frac{4}{5}$, $|a| = \frac{1}{5}\sqrt{20}$

Aufgabe 2

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$: die Reihe ist alternierend.

$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 0$, monoton fallend und $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 0 \quad (n\to\infty)$

(nach Vorlesung / Übung wird durch $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ eine Intervallschachtelung für die Zahl e gegeben)

Nach dem Leibniz Kriterium liegt Konvergenz vor.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{4n}{3n}}$: Quotientenkriterium mit $a_n = \frac{1}{\binom{4n}{3n}} = \frac{(3n)!\,n!}{(4n)!}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(4n)!\,(3n+3)!\,(n+1)!}{(3n)!\,n!\,(4n+4)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{4(4n+3)(4n+2)(4n+1)}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^3 < 1$$

Nach dem Quotientenkriterium liegt Konvergenz vor.

b) Nach Vorlesung gilt $\sqrt[n]{n} \to 1 \quad (n\to\infty)$. Somit gilt ab einer festen Zahl $N\in\mathbb{N}$: $0 \leq \sqrt[n]{n}-1 \leq \frac{1}{2} \quad (n\geq N)$

Da $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \quad (n\to\infty)$, folgt nach Satz der Vorlesung

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n = 0.$$

Aufgabe 3

a) $f(x) = \frac{1}{x}\left(e^{x\ln\alpha} - e^{x\ln\beta}\right)$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}(\alpha^x - \beta^x) + \frac{1}{x}(\alpha^x \ln\alpha - \beta^x \ln\beta)$$

b) $\lim_{x\to 0} f(x)$ ist ein Ausdruck $\left(\frac{0}{0}\right)$. Wir berechnen (L'Hospital)

$$\lim_{x\to 0} \frac{D(\alpha^x - \beta^x)}{D(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^x\ln\alpha - \beta^x\ln\beta}{1} = \ln\frac{\alpha}{\beta}$$

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ \ln\frac{\alpha}{\beta}, & x = 0 \end{cases}$$

c) $$h'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^x - \beta^x - x\ln\frac{\alpha}{\beta}}{x^2} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Wir berechnen (L'Hospital) $\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^x\ln\alpha - \beta^x\ln\beta - \ln\frac{\alpha}{\beta}}{2x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$

indem noch mal die Regel von L'Hospital angewendet wird:

$$h'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^x(\ln(\alpha))^2 - \beta^x(\ln\beta)^2}{2} = \frac{1}{2}\left((\ln\alpha)^2 - (\ln\beta)^2\right)$$

d) Wir entwickeln h um 0 in eine Potenzreihe

$$h(x) = \frac{1}{x}\left(e^{x\ln\alpha} - e^{x\ln\beta}\right) = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k(\ln\alpha)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k(\ln\beta)^k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}x^{k-1}(\ln\alpha)^k - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{k-1}(\ln\beta)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}\left((\ln\alpha)^{k+1} - (\ln\beta)^{k+1}\right)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}h^{(k)}(0)\,x^k$$

$$\rightarrow h^{(k)}(0) = \frac{1}{k+1}\left((\ln\alpha)^{k+1} - (\ln\beta)^{k+1}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Für $k=0$ ist das b), für $k=1$ c).

VD HMI 15/3/2007 Lösungen

Aufgabe 4

a) $\displaystyle\int^{x} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}+\sqrt{t}}$ geht mit der Substitution $t \to u = \sqrt[6]{t}$

über in: $\displaystyle 6\int^{\sqrt[6]{x}} \frac{u^5\,du}{u^2+u^3} = 6\int^{\sqrt[6]{x}} \frac{u^3\,du}{1+u}$

$$= 6\int^{\sqrt[6]{x}} \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{1+u}\right) du$$

also: $\displaystyle\underline{\int^{x} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}+\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}$

b) $\displaystyle I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2+4)\arctan\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{2}\,dx}{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}$

Substituiere $x \to u = \arctan\frac{x}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int_{\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\arctan\sqrt{3}} \frac{du}{u}$$

mit $\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ und $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

erhält man:

$$I = \frac{1}{2}\ln u \,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = \underline{\frac{1}{2}\ln 2}$$