HMI VD Lösungen 3. März 2008

Aufgabe 1

a) Induktionsanfang: $\underline{n=2}$: $\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2+j} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ✓

Induktionsschluss: Ind.vor.: Für ein $n \geq 2$ gilt $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j} > \frac{1}{2}$.

Ind.beh.: $\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+j} > \frac{1}{2}$

Bew.: $$\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+j} \underset{l=j+1}{=} \sum_{l=2}^{n+2}\frac{1}{n+l}$$

$$= \underbrace{\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{n+l}}_{\overset{\text{Ind vor}}{>}\ \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2n+1} + \underbrace{\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}}_{=-\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}}}_{>0,\ \text{da } 2n+2 > 2n+1}$$

$$> \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \checkmark$$

einfacher: $1 \leq j \leq n$, $n \geq 2$ $\rightarrow$ $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$ und $\frac{1}{n+j} \geq \frac{1}{2n}$ $(j = 2, \dots, n)$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j} > n\frac{1}{2n} = \underline{\frac{1}{2}}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ hat den Konvergenzradius $r = 1$ $\left(\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1\right)$,

die Reihe konvergiert genau für $-1 < x < 1$.

Für $|x| < 1$ gilt mit Sätzen der Vorlesung (Diff. von Potenzreihen) und mit $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (geometrische Reihe):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'$$

$$= x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' = \underline{\frac{x}{(1-x)^2}} \text{ für } |x|<1$$

2a.)

$\underline{n=0}$: $g(x) = \begin{cases} x_0 & x=0 \\ \cos 1 & x>0 \end{cases}$. Für $\underline{x_0 = \cos 1}$ ist $f$ konstant, damit auch stetig und diff'bar, $f'(0)=0$.

$\underline{n \geq 1}$: $g(x) = \begin{cases} x_0 & x=0 \\ x^n \cos(\frac{1}{x}) & x>0 \end{cases}$ $\underbrace{x^n}_{\to 0} \underbrace{\cos(\tfrac{1}{x})}_{\text{beschr.}} \to 0 \quad (x \to 0)$.

Damit ist $g$ stetig für $\underline{x_0 = 0}$

Zu untersuchen ist, ob der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} x^{n-1} \cos(\tfrac{1}{x}) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{x} & \text{ex. nicht für } n=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^{n-1} \underbrace{\cos\tfrac{1}{x}}_{\text{beschr.}} = 0 & \text{für } n>1 \end{cases}$$

Für $n>1$ $(n=1)$ ist $g$ damit (nicht) diff'bar, $g'(0)=0$.

(Außer im Punkte 0 ist $g$ in jedem Falle diff'bar.

b) Für $x \leq 0$: $h_n(x) = 1 \to 1 =: h(x)$

Für $x>0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$: $x > \frac{\pi}{n_0}$. Damit gilt für $n \geq n_0$:

$h_n(x) = -1 \to -1 =: h(x)$

Also konvergiert $(h_n)$ punktweise gegen die nicht stetige Fkt. $h$. Da alle $h_n$ stetig sind, kann keine glm. Konv. vorliegen.

($h_n$ ist stetig, da $\cos(0 \cdot x) = 1$, $\cos(n \cdot \frac{\pi}{n}) = \cos\pi = -1$)

3 b.)

(i) $a_n := \frac{1}{n^2}\left(1+(-1)^n\right)^n = \begin{cases} 2^n \cdot n^{-2} & \text{für gerades } n \\ 0 & \text{für ungerades } n \end{cases}$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot n^{-\frac{2}{n}} = 2$$

Wurzelkrit $\to$ für $|x| \begin{cases} < \frac{1}{2} & \text{konvergiert} \\ > \frac{1}{2} & \text{divergiert} \end{cases}$ $\sum a_n x^n$.

$|x| = \frac{1}{2}$ : $a_n x^n = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } n \\ \frac{1}{n^2} & \text{für gerades } n \end{cases} \leq \frac{1}{n^2}$, insb. $|a_n x^n| \leq \frac{1}{n^2}$.

Damit ist $\sum \frac{1}{n^2}$ eine konvergente Majorante.
Also konvergiert $\sum a_n x^n$ für $|x| = \frac{1}{2}$. (sogar absolut)

(ii) $b_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$. $\quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \cdot \frac{(2n)!}{(2(n+1))!} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{2n+1} \longrightarrow \frac{1}{4}$$

Quotientenkrit $\to$ für $|z| \begin{cases} < 4 & \text{Konv.} \\ > 4 & \text{div.} \end{cases}$ $\sum b_n z^n$

Für $|z| = 4$ : $\left|\frac{b_{n+1} z^{n+1}}{b_n z^n}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{2n+1} 4 = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$, also

ist $b_n z^n$ keine Nullfolge. Damit divergiert $\sum b_n z^n$ für $|z| = 4$.

a.) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x^2-x)\cos x}{\sinh x} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{\overset{\text{l'hôpital}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\overbrace{(2x-1)}^{\to -1}\overbrace{\cos x}^{\to 1} + \overbrace{(x^2-x)}^{\to 0}\overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{\cosh x}_{\to 1}} = -1$

($\cosh x \neq 0$, Nenner & Zähler diff'bar)

oder: $\lim\limits_{x\to 0} -\text{"}- = \lim \underbrace{\frac{x}{\sinh x}}_{\overset{(*)}{\to} 1} \cdot \underbrace{(x-1)}_{\to -1} \cdot \underbrace{\cos x}_{\to 1} = -1$

Mit $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sinh} \overset{\text{l'hô.}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cosh} = 1$. (*)

Aufgabe 4 (Partialbruchzerlegung, PBZ)

$$R(x) := \frac{x^3+3x^2+x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} \quad . \quad \underbrace{\text{grad(Zählerpolynom)}}_{=3} < \underbrace{\text{grad(Nenner)}}_{=4}$$

Nenner $= (x+1)^2(x+i)(x-i)$. Nach Vorlesung (Satz 3, S.64) wird der Ansatz $R(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-i} + \frac{D}{x+i}$

gemacht. A, B, C, D sind zu bestimmen.

Bilde $R(x)\cdot(x+1)^2(x^2+1)$ und setze $x=-1 \to B=1$

setze $x=i \to C=\frac{1}{2}$

setze $x=-i \to D=\frac{1}{2}$

Bilde $R(x)(x+1)$ und dann $\lim\limits_{x\to\infty}$ und verwende die schon bestimmten Koeffizienten $\longmapsto A=0$

$$\to R(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i}+\frac{1}{x-i}\right) = \frac{1}{(x+1)^2} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x+i}\right)$$

$$\underline{R(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}} \quad \to \int_0^1 R(x)\,dx = -\frac{1}{x+1}\Bigg|_{x=0}^{1} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Bigg|_{x=0}^{1}$$

$$\underline{\int_0^1 R(x)\,dx = \frac{1}{2}(1+\ln 2)}$$