UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Frühjahr 2009
16.03.2009

Diplom–Vorprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{(2\sqrt[4]{n}+4\sqrt[8]{n})^2}\,.$$

Prüfen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n\to\infty$ konvergent ist, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

b) Begründen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+i}{10}\right)^n$$

absolut konvergent ist, und bestimmen Sie den Realteil sowie den Imaginärteil des Reihenwertes.

c) Die Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,\sin\bigl(e^{\frac{1}{|x|}} - \ln(x^4)\bigr) & \text{für } x\neq 0\,,\\ 0 & \text{für } x = 0\,.\end{cases}$$

Geben Sie alle $x_0\in\mathbb{R}$ an, in denen f differenzierbar ist, und bestimmen Sie in diesen Stellen $f'(x_0)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{4^n+5^n}\,x^n$$

und bestimmen Sie alle $x\in\mathbb{R}$, für welche diese Reihe konvergiert.

Hinweis: Finden Sie Konstanten $c, d > 0$ mit $c\cdot 5^n \leqslant 4^n + 5^n \leqslant d\cdot 5^n$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)\,n!}$ für alle $x\in\mathbb{R}$ konvergent ist und dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)\,n!} = (x-1)e^x - \frac{1}{2}\,x^2 + 1$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral
$$\int_0^{\ln 2} \frac{2e^x+1}{e^x+e^{-x}}\,dx\,.$$

b) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral
$$\int_{e^2}^{\infty} x^{-x}e^x\,dx$$
auf Konvergenz.

c) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch $f_n\colon [0,2]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=n^2x\,e^{-(nx)^2}$.

- **i)** Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,2]$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert.
- **ii)** Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^2 f_n(x)\,dx$ für jedes $n\in\mathbb{N}$.
- **iii)** Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,2]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Sei $A=\begin{pmatrix} -i & 1 & 2i & 0\\ -2 & -2i & 5 & 1+i\\ i & -1 & 2 & 4i\end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} A$ und eine Basis von $\operatorname{Bild} A$.

b) In Abhängigkeit von $b\in\mathbb{R}$ sei die Matrix $M_b\in\mathbb{R}^{3\times3}$ gegeben durch
$$M_b=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & b & b(b+1)\\ b-1 & b & b\end{pmatrix}.$$

- **i)** Ermitteln Sie alle $b\in\mathbb{R}$, für welche M_b regulär ist, und berechnen Sie M_b^{-1} für diese b.
- **ii)** Sei $b=-1$ und $V=\mathbb{R}^3$, $W=\mathbb{R}^3$. Die lineare Abbildung $\phi\colon V\to W$ besitze bezüglich der Standardbasen in V und W die Darstellungsmatrix M_{-1}.
  Geben Sie Basen von V und von W so an, dass die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich dieser Basen die Einheitsmatrix I_3 ist.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab Mittwoch, den **01.04.2009**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-f.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer **mündlichen** Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, den **21.04.2009**, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Geb. 20.30) statt.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom **27.04.2009** bis **30.04.2009** im Allianz-Gebäude.

Die **allgemeine** Klausureinsicht (siehe Aushang) findet am Mittwoch, den **22.04.2009**, von 14.00 bis 16.00 Uhr im Eiermann-Hörsaal (Gebäude 20.40) statt.