UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Frühjahr 2009
16.03.2009

Diplom–Vorprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{n^{1/2}+1}{(2n^{1/4}+4n^{1/8})^2} = \frac{1+n^{-1/2}}{(2+4n^{-1/8})^2} \,.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} n^{-1/8} = 0$ ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ konvergent mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+0}{(2+0)^2} = \frac{1}{4}$.

b) Wegen

$$\left|\frac{3+i}{10}\right| = \sqrt{\frac{9}{100}+\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{10}}{10} < 1$$

ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3+i}{10})^n$ absolut konvergent. Folglich ist auch $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3+i}{10})^n$ absolut konvergent und der Reihenwert beträgt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+i}{10}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+i}{10}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{3+i}{10}} - 1 = \frac{10}{7-i} - 1 = \frac{70+10i}{7^2+1^2} - 1 = \frac{20+10i}{50} = \frac{2}{5} + \frac{i}{5} \,.$$

Also ist $\mathrm{Re}\big(\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3+i}{10})^n\big) = \frac{2}{5}$ und $\mathrm{Im}\big(\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3+i}{10})^n\big) = \frac{1}{5}$.

c) Für $x > 0$ gilt

$$f(x) = x^2 \sin\big(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) \,.$$

Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist f auf $(0,\infty)$ differenzierbar und für die Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin\big(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) + x^2 \cos\big(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) \cdot \big(e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\tfrac{1}{x^2}) - \tfrac{1}{x^4} \cdot 4x^3\big) \\ &= 2x \sin\big(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) - \big(e^{\frac{1}{x}} + 4x\big) \cdot \cos\big(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) \,, \qquad x > 0 \,. \end{aligned}$$

Für $x < 0$ gilt

$$f(x) = x^2 \sin\big(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) \,.$$

Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist f auf $(-\infty, 0)$ differenzierbar und für die Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin\big(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) + x^2 \cos\big(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) \cdot \big(e^{-\frac{1}{x}} \cdot \tfrac{1}{x^2} - \tfrac{1}{x^4} \cdot 4x^3\big) \\ &= 2x \sin\big(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) + \big(e^{-\frac{1}{x}} - 4x\big) \cdot \cos\big(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) \,, \qquad x < 0 \,. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\big(e^{\frac{1}{|x|}} - \ln(x^4)\big) = 0 \,,$$

weil $|\sin(e^{\frac{1}{|x|}} - \ln(x^4))| \leqslant 1$ für alle $x \neq 0$ ist. Damit ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

Aufgabe 2

a) Wegen

$$5^n \leqslant 4^n + 5^n \leqslant 5^n + 5^n = 2 \cdot 5^n$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$5 = \sqrt[n]{5^n} \leqslant \sqrt[n]{4^n + 5^n} \leqslant \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 5\,.$$

Aufgrund von $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + 5^n} = 5$. Hiermit ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{4^n + 5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{4^n + 5^n}} = \frac{3}{5}\,.$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+5^n}\, x^n$ beträgt somit $5/3$. Deshalb ist diese Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 5/3$ konvergent und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 5/3$ divergent. Zu untersuchen verbleibt der Fall $|x| = 5/3$, also $x = 5/3$ oder $x = -5/3$:

Für $x = 5/3$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + 5^n}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{4^n + 5^n}\,.$$

Diese Reihe divergiert wegen $\frac{5^n}{4^n+5^n} = \frac{1}{(4/5)^n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{0+1} = 1 \neq 0$.

Für $x = -5/3$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + 5^n}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{4^n + 5^n}$$

divergent, weil $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := \frac{(-5)^n}{4^n+5^n} = \frac{(-1)^n}{(4/5)^n+1}$ keine Nullfolge ist.

Fazit: Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+5^n}\, x^n$ konvergiert genau für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 5/3$.

b) Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{x^{n+2}}{(n+2)\, n!} \right| = |x|^2 \cdot \frac{|x|^n}{(n+2)\, n!} \leqslant |x|^2 \cdot \frac{|x|^n}{n!}$$

gilt, ist $|x|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = |x|^2(e^{|x|} - 1)$ eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)\, n!}$. Folglich ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)\, n!}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ (absolut) konvergent.

Setzt man $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)\, n!}$, dann ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x(e^x - 1)\,.$$

Definiert man $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = (x-1)e^x - \frac{1}{2}\, x^2 + 1$, so ist g auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$g'(x) = e^x + (x-1)e^x - x = xe^x - x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Also gilt $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Demzufolge existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen $f(0) = 0$ und $g(0) = 0$ ergibt sich $c = 0$. Damit ist die behauptete Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)\, n!} = (x-1)e^x - \frac{1}{2}\, x^2 + 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

bewiesen.

Aufgabe 3

a) Die Substitution $u = e^x$, $dx = \frac{du}{u}$ führt auf

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \frac{2e^x+1}{e^x+e^{-x}}\,dx &= \int_1^2 \frac{2u+1}{u+u^{-1}}\,\frac{du}{u} = \int_1^2 \frac{2u+1}{u^2+1}\,du = \int_1^2 \Big(\frac{2u}{u^2+1} + \frac{1}{u^2+1}\Big)\,du \\ &= \Big[\ln(u^2+1) + \arctan(u)\Big]_1^2 = \ln(5) + \arctan(2) - \big(\ln(2) + \arctan(1)\big) \\ &= \ln(5/2) + \arctan(2) - \pi/4\,.\end{aligned}$$

b) Für jedes $x \geqslant e^2$ gilt wegen $\ln x \geqslant 2$

$$1 - \ln x \leqslant -1\,.$$

Hiermit ergibt sich für jedes $x \geqslant e^2$

$$|x^{-x}e^x| = e^{-x\ln x}e^x = e^{x(1-\ln x)} \leqslant e^{-x}\,.$$

Da das uneigentliche Integral $\int_{e^2}^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{r\to\infty}[-e^{-x}]_{e^2}^r = \lim_{r\to\infty}(-e^{-r} + e^{-e^2}) = e^{-e^2}$ konvergiert, ist

$$\int_{e^2}^\infty x^{-x}e^x\,dx$$

nach dem Majorantenkriterium konvergent.

c) **i)** Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n(0) = 0$, also ist $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.
Sei nun $x \in (0,2]$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_n(x)| = \frac{n^2x}{e^{(nx)^2}} = \frac{n^2x}{\sum_{k=0}^\infty \frac{(nx)^{2k}}{k!}} \leqslant \frac{n^2x}{\frac{(nx)^4}{2}} = \frac{2}{x^3}\cdot\frac{1}{n^2}\,.$$

Demzufolge ist

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\,.$$

Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,2]$ punktweise gegen die Nullfunktion.

ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ liefert die Substitution $u = n^2x^2$, $du = 2n^2x\,dx$

$$\int_0^2 f_n(x)\,dx = \int_0^2 n^2x\,e^{-n^2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{4n^2} e^{-u}\,du = \Big[-\frac{e^{-u}}{2}\Big]_0^{4n^2} = \frac{1-e^{-4n^2}}{2}\,.$$

iii) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0,2]$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^2 f_n(x)\,dx \overset{\text{ii)}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-4n^2}}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^2 0\,dx = \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

Wäre nämlich die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,2]$ gleichmäßig konvergent, so müsste $\lim_{n\to\infty}\int_0^2 f_n(x)\,dx = \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ gelten.

Alternative Begründung: Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $x_n = \frac{1}{n}$. Dann ist $x_n \in [0,2]$ und es gilt

$$f_n(x_n) = n^2\,\frac{1}{n}\,e^{-1} = \frac{n}{e} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \neq 0\,.$$

Aufgabe 4

a) Mittels Zeilenumformungen bringt man $A \in \mathbb{C}^{3\times 4}$ auf Zeilennormalform (die Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2 und Z_3 bezeichnet):

$$A = \begin{pmatrix} -i & 1 & 2i & 0 \\ -2 & -2i & 5 & 1+i \\ i & -1 & 2 & 4i \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to iZ_1]{Z_3 \to Z_3 + Z_1} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 0 \\ -2 & -2i & 5 & 1+i \\ 0 & 0 & 2+2i & 4i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 + 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 0 & 2+2i & 4i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_1 \to Z_1 + 2Z_2]{Z_3 \to Z_3 - (2+2i)Z_2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 2+2i \\ 0 & 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man kann nun den (-1)-Ergänzungstrick verwenden, um eine Basis von $\operatorname{Kern} A$ abzulesen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+2i \\ 0 \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aus der Dimensionsformel $\dim \operatorname{Bild} A + \dim \operatorname{Kern} A = 4$ folgt $\dim \operatorname{Bild} A = 2$. Da die zwei Vektoren

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} -i \\ -2 \\ i \end{pmatrix}, \quad Ae_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 4i \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind und beide in $\operatorname{Bild} A$ liegen, ist $\{Ae_1, Ae_4\}$ eine Basis von $\operatorname{Bild} A$.

b) Sei $b \in \mathbb{R}$ und

$$M_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & b & b(b+1) \\ b-1 & b & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

i) Für $b = 0$ ist M_0 nicht regulär, weil in diesem Fall die zweite Zeile von M_0 eine Nullzeile ist. Für $b \neq 0$ ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & b(b+1) & 0 & 1 & 0 \\ b-1 & b & b & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to \frac{1}{b}Z_2]{Z_3 \to Z_3 + (1-b)Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b+1 & 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 1 & b & 1-b & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b+1 & 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b & -1/b & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to -Z_3]{Z_2 \to Z_2 + (b+1)Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-b^2 & -1 & b+1 \\ 0 & 0 & 1 & b-1 & 1/b & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b^2 & 1 & -(b+1) \\ 0 & 1 & 0 & 1-b^2 & -1 & b+1 \\ 0 & 0 & 1 & b-1 & 1/b & -1 \end{array}\right)$$

Fazit: Genau für $b \neq 0$ ist die Matrix M_b regulär. In diesem Fall gilt

$$M_b^{-1} = \begin{pmatrix} b^2 & 1 & -(b+1) \\ 1-b^2 & -1 & b+1 \\ b-1 & 1/b & -1 \end{pmatrix}.$$

ii) Sei $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^3$. Die lineare Abbildung $\phi \colon V \to W$ besitze bezüglich der Standardbasen in V und W die Darstellungsmatrix

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da die drei Vektoren $w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, w_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von $W = \mathbb{R}^3$. Bezeichnen e_1, e_2, e_3 die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\phi(e_1) = M_{-1}\, e_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = w_1 = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3\,, \\
\phi(e_2) = M_{-1}\, e_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = w_2 = 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3\,, \\
\phi(e_3) = M_{-1}\, e_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = w_3 = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 1 \cdot w_3\,.
\end{aligned}$$

Wählt man in V die Standardbasis e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$ und in W die Basis w_1, w_2, w_3, so ist die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich dieser Basen die Einheitsmatrix I_3.