Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Frühjahr 2010
02.03.2010

Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfülle

$$a_n > 0 \qquad \text{und} \qquad \left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n = 2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Prüfen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

b) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}\,.$$

c) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}-\frac{2n-1}{2n}\right)$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Ermitteln Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-3)^k}{k}\,(x+1)^k$$

und bestimmen Sie für jedes $x\in\mathbb{R}$ mit $x+1\in(-R,R)$ den Reihenwert.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes für alle $x,y\in[e,\infty)$

$$\big|\ln(1+\ln x)-\ln(1+\ln y)\big| \leqslant \frac{1}{2e}\,|x-y|\,.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

i) $\displaystyle\int_1^2 \big(\sqrt{x}-1\big)\big(\sqrt{x}+1\big)\, e^{x^2-2x+1}\, dx$

ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+(\sin x)^2}\, dx$

iii) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x^3-x^2}\, dx$

b) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\sin t \leqslant f(t) \leqslant t \qquad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Untersuchen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)\, dt$$

existiert, und berechnen Sie diesen gegebenenfalls.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Auf dem Intervall $[0,1]$ seien die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$f_n(x) := \big(\sin(\pi x)\big)^n, \qquad g_n(x) := e^{-nx+1}\big(\sin(n\pi x)\big)^n, \qquad h_n(x) := \big(2+\sin(\pi x)\big)^{-n}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie für jedes $x \in [0,1]$ die Grenzwerte

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x), \qquad h(x) := \lim_{n\to\infty} h_n(x).$$

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(\frac{1}{2n})$ sowie $\max\{\, h_n(x) \mid x \in [0,1] \,\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

c) Welche der drei Funktionenfolgen sind auf dem Intervall $[0,1]$ gleichmäßig konvergent? Welche sind dort nicht gleichmäßig konvergent? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Freitag, den 26.03.2010, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 14.04.2010, von 14:00 Uhr bis 16:00 Uhr im Benz-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 19.04.2010 bis 23.04.2010 im Allianz-Gebäude 05.20.