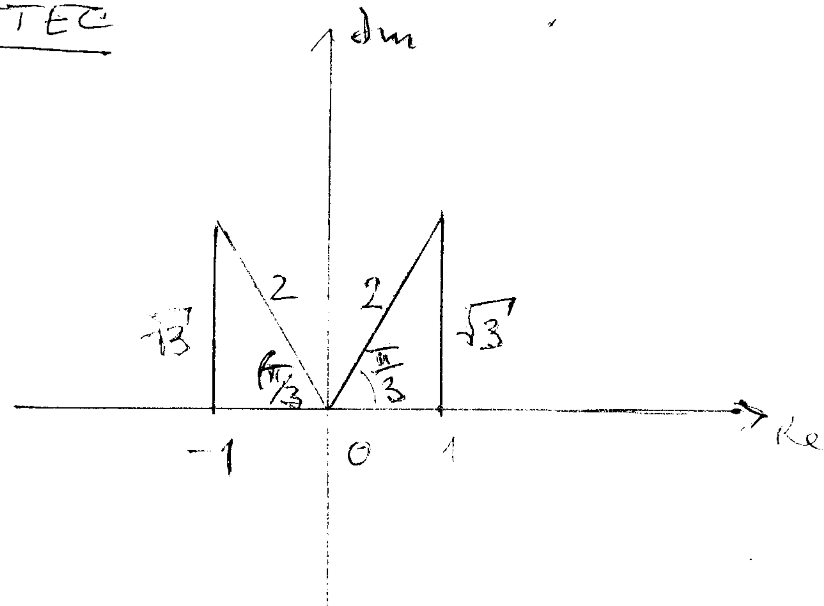
HMI Lösungen Frühjahr 2010

ETEC

A1

a)



Man liest ab mit $|-1+\sqrt{3}\,i| = 2$:

$$-1+\sqrt{3}\,i = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z = (-1+\sqrt{3}\,i)^{11} = 2^{11} e^{i\frac{22}{3}\pi} = 2^{11} e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$= 2^{10}(-1-\sqrt{3}\,i)$$

$\underline{\mathrm{Re}(z) = -2^{10}, \ \mathrm{Im}(z) = -2^{10}\sqrt{3}, \ |z| = 2^{11}}$

b) $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1 \iff |a-b|^2 < |1-\bar{a}b|^2$

$$\iff |a|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{a}b) + |b|^2 < 1 + |a|^2|b|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{a}b)$$

$$\iff |b|^2(1-|a|^2) < 1-|a|^2$$

$$\overset{|a|<1}{\iff} \underline{|b|<1}$$

A2 ETEC (A1 Physik)

a) $(1+\frac{a_n}{n})^n = 2$ und $a_n > 0 \Rightarrow a_n = n(\sqrt[n]{2}-1)$

$$a_n = n\left(e^{\frac{1}{n}\ln 2} - 1\right) = n\left(1+\frac{1}{n}\ln 2+\frac{1}{2!}\frac{1}{n^2}(\ln 2)^2+\dots-1\right)$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2!}(\ln 2)^2+\frac{1}{n}\frac{1}{3!}(\ln 2)^3+\dots\right)$$

$$\to \ln 2 \qquad (n\to\infty).$$

(a_n) ist konvergent mit Grenzwert $\ln 2$.

b) Für $n\in\mathbb{N}$ gilt: $1 \le \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} \le \sqrt[n]{n}$

Da $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, gilt also $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}=1$

c) Es ist $0<\frac{2n}{2n+1}-\frac{2n-1}{2n}=\frac{4n^2-4n^2+1}{4n^2+2n}$

$$=\frac{1}{4n^2+2n}<\frac{1}{4n^2}$$

Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (nach Vorlesung) konvergent ist,

konvergiert die vorliegende Reihe nach dem Majorantenkriterium.

A 3 (ETET) (A 2 Physik)

a) Mit $a_k = \frac{1}{k}(-3)^k$, $k = 2, 3, \ldots$ gilt

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{3^k (k+1)}{3^{k+1}\, k}\right| = \frac{1}{3} = R$$

Es ist $p(x) := \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k}(x+1)^k$, $|x+1| < \frac{1}{3}$, gesucht.

Für x mit $|x+1| < \frac{1}{3}$ gilt

$$p'(x) = (-3)\sum_{k=1}^{\infty}\left((-3)(x+1)\right)^k$$

geometrische Reihe mit $|(-3)(x+1)| < 1$

$$\stackrel{\downarrow}{=} (-3)\,\frac{1-(1+3x+3)}{1+3(x+1)}$$

$$p'(x) = 3\,\frac{3x+3}{3x+4}, \quad p(-1) = 0$$

$$\Rightarrow p(x) = 3\int_{-1}^{x}\frac{3t+4-1}{3t+4}\,dt \qquad \left(|x+1| < \tfrac{1}{3}\right)$$

$$= 3\int_{-1}^{x} dt - \int_{-1}^{x}\frac{3}{3t+4}\,dt = 3(x+1) - \ln(3x+4)$$

b) $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y|$, ξ zwischen x, y

Für $f(x) = \ln(1+\ln x)$ gilt $f'(x) = \frac{1}{(1+\ln x)x}$

Für $x \geq e$ gilt $0 \leq f'(x) \leq f'(e) = \frac{1}{2e}$ (da $\ln x$ und x $\uparrow$)

$$\Rightarrow |\ln(1+\ln x) - \ln(1+\ln y)| \leq \frac{1}{2e}|x-y|, \quad x, y \geq e.$$

A4

a) (ETEC) (Physik 3a)

i) $\int_1^2 (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)e^{x^2-2x+1}dx$

$= \frac{1}{2}\int_1^2 2(x-1)e^{(x-1)^2}dx = \frac{1}{2}e^{(x-1)^2}\Big|_{x=1}^{2} = \frac{1}{2}(e-1)$

ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)(\sin x)'dx$ mit $f(\tau)=\frac{\tau}{1+\tau^2}$

Substitution
$x \to \tau = \sin x$ $= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2\tau}{1+\tau^2}d\tau = \frac{1}{2}\ln(1+\tau^2)\Big|_{\tau=0}^{1} = \frac{1}{2}\ln 2$

iii) $\int_1^2 \sqrt{x^3-x^2}\,dx = \int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

(Substituiere
$x \to \tau := \sqrt{x-1}$
$d\tau = \frac{1}{2}\frac{dx}{\tau}$
$x = \tau^2+1$)

$= \int_0^1 (\tau^2+1)\tau\, 2\tau\, d\tau = \frac{16}{15}$

(oder mit partieller Integration)

b) Für $3 \leq x \leq 7$ gilt $4 \leq x+1 \leq 8$

$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4} \geq \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{8}$

$\Longrightarrow \quad \frac{x}{1+x} = 1-\frac{1}{x+1} \begin{cases} \leq 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\ \geq 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{cases}$

Integriere $\frac{3}{4} \leq \frac{x}{1+x} \leq \frac{7}{8}$ von 3 bis 7:

$\int_3^7 \frac{3}{4}dx = 3 \leq \int_3^7 \frac{x}{1+x}dx \leq \int_3^7 \frac{7}{8}dx = \frac{7}{2}$

A 3 b) (Physik)

$$\sin t \leq f(t) \leq t \quad , 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_0^x \Rightarrow \quad 1-\cos(x) \leq \int_0^x f(t)\,dx \leq \frac{1}{2} x^2 \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$\Big| \cdot \frac{1}{x^2}, x>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1-\cos(x)}{x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Potenzreihe}}}{=} \frac{1}{2} + \text{Terme mit } x \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)\,dt \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}}$$

(oder auch mit L'Hospital)

Aufgabe 4 (Physik)

a) $0 \le \sin \pi x = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{2} \\ < 1 & 0 \le x \le 1, x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \underline{f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \frac{1}{2} \\ 1 & x = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1.}$$

Es ist $g_n(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Da $|\sin(n\pi x)| \le 1$ und da für $x > 0$ $e^{-nx} \to 0$ $(n \to \infty)$ gelten, folgt

$$\underline{g(x) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le 1}.$$

Für $0 \le x \le 1$ gilt $2 \le 2 + \sin \pi x \le 3$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^n \le h_n(x) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad (0 \le x \le 1)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{h(x) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le 1}$$

b) $g_n\left(\frac{1}{2n}\right) = e^{-\frac{1}{2}+1}\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^n = \sqrt{e}$

und siehe a) $\max\{h_n(x), 0 \le x \le 1\} = h_n(0) = \frac{1}{2^n}$

c) Die f_n sind stetig, f ist <u>nicht</u> stetig (auf $[0,1]$)

$\Rightarrow$ <u>Die Konvergenz $f_n \to f$ ist nicht gleichmäßig</u>

Es gilt (mit b)) $\underbrace{\max\{|g_n(x) - g(x)|, 0 \le x \le 1\}}_{\|g_n - g\|_\infty} \ge g_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \sqrt{e}$

Es gilt also <u>nicht</u> $\|g_n - g\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$. <u>Die Konvergenz $g_n \to g$ auf $[0,1]$ ist nicht</u>

noch <u>A4 (Physik)</u>

<u>noch b)</u>

$$\max\{ |\tilde{h}_n(x) - h(x)|, 0 \le x \le 1 \} = \frac{1}{2^n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

$\tilde{h}_n \to h \ (n \to \infty)$. <u>Die Konvergenz ist gleichmäßig auf $[0,1]$.</u>