Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Frühjahr 2011
28.02.2011

**Bachelor–Modulprüfung**

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik**

**Aufgabe 1** **($5+5=10$ Punkte)**

**a)** Gegeben seien die Mengen

$$K := \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-i| = 5 \,\} \qquad \text{und} \qquad H := \{\, z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \mid \arg(z) = \tfrac{3}{4}\pi \,\}\,.$$

**i)** Skizzieren Sie $K$ und $H$ in der komplexen Zahlenebene.

**ii)** Berechnen Sie $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ für jedes $z \in K \cap H$.

**b)** Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \le n! \cdot 2\,.$

**Aufgabe 2** **($4+4+2=10$ Punkte)**

Gegeben sei die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kz^k,\ z \in \mathbb{C}\,.$

**a)** Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die die Reihe konvergiert.

**b)** Berechnen Sie für alle $z \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert, den Wert der Reihe.

**c)** Berechnen Sie $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}\right)^3.$

**– bitte wenden –**

**Aufgabe 3 (4 + 6 = 10 Punkte)**

**a)** Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \dfrac{x - \sin(x)}{x^2} & \text{falls } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{falls } x = 0\,. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, in welchen Stellen $f$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie dort die Ableitung $f'$.

**b)** Berechnen Sie die folgenden Integrale

**i)** $\displaystyle\int_{-1}^{\pi} \left|\cos\left(\tfrac{x+|x|}{2}\right)\right| dx\,,$

**ii)** $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2x}{(x^2+1)^2} \cdot \left(\tfrac{1}{3}x^3 + x\right) dx\,.$

*Hinweis zu ii): Partielle Integration.*

**Aufgabe 4 (5 + 5 = 10 Punkte)**

**a)** Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2k}} & \text{falls } n = 2k \text{ mit } k \in \mathbb{N}\,, \\ \dfrac{1}{2^{k+1}} & \text{falls } n = 2k+1 \text{ mit } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie

**i)** $\limsup \sqrt[n]{a_n}\,,$ **ii)** $\limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\,,$ **iii)** $\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\,.$

**b)** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := nxe^{-nx^2}$$

gegeben.

Berechnen Sie die Grenzfunktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, gegen die die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ punktweise konvergiert.

Untersuchen Sie, ob die Konvergenz $f_n \to f \ (n \to \infty)$ auf

**i)** $[0,\infty)\,,$ **ii)** $[\frac{1}{2},\infty)$

gleichmäßig ist.

**Viel Erfolg!**

**Nach der Klausur:**
Die Klausurergebnisse hängen ab Mittwoch, den 23.03.2011, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 13.04.2011, von 14:00 Uhr bis 16:00 Uhr im Benz-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 18.04.2011 bis 21.04.2011 im Allianz-Gebäude 05.20.