KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11

Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Lösungsvorschläge zur Bachelor–Modulprüfung
für die Fachrichtung Physik

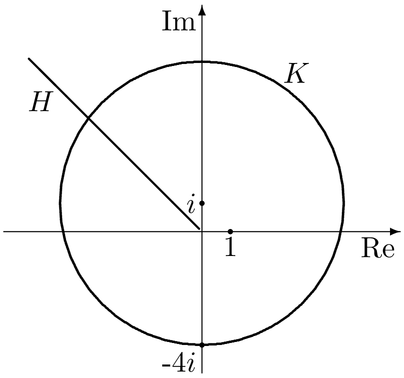
Aufgabe 1

a) **i)** Die Menge K besteht aus allen Punkten, die zum Punkt i den Abstand 5 haben; K ist also ein Kreis mit Radius 5 um i.
Außerdem gilt

$$H = \{ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \arg(z) = \tfrac{3}{4}\pi \} = \{ z \in \mathbb{C} : z = re^{\frac{3}{4}\pi i},\ r > 0 \} =$$

$$\{ z \in \mathbb{C} : z = r\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\Big),\ r > 0 \} = \{ z \in \mathbb{C} : z = r(-1 + i),\ r > 0 \}.$$

H ist also die Halbgerade durch 0 und $-1 + i$ (ohne den Punkt 0).
Die gegebenen Mengen lassen sich damit wie folgt skizzieren.



ii) Sei $z \in K \cap H$. Wir setzen $x := \operatorname{Re} z$ und $y := \operatorname{Im} z$.
Wegen $z \in K$ gilt $25 = |z - i|^2 = |x + i(y - 1)|^2 = x^2 + (y - 1)^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$.
Wegen $z \in H$ folgt wie in i) außerdem $x = -y$.
Aus beidem zusammen folgt $24 = x^2 + x^2 + 2x = 2(x^2 + x)$. Das ist gleichbedeutend mit $x = 3$ oder $x = -4$. Damit folgt $z = 3 - 3i$ oder $z = -4 + 4i$. Offenbar ist $3 - 3i \notin K \cap H$ und $-4 + 4i \in K \cap H$.
$K \cap H$ besteht also aus genau einem Punkt, nämlich $z = -4 + 4i$, und für dieses z gilt $\operatorname{Re} z = -4$ und $\operatorname{Im} z = 4$.

b) Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion:

I.A. ($n = 1$): Es gilt $\sum_{k=1}^{1} k! = 1 \leq 1! \cdot 2$.

I.S.: Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{k=1}^{n} k! \leq n! \cdot 2$ (I.V.). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k! = \sum_{k=1}^{n} k! + (n + 1)! \overset{\text{I.V.}}{\leq} 2n! + (n + 1)! \leq$$

$$(n + 1)n! + (n + 1)! = 2(n + 1)!;$$

die Induktionsbehauptung trifft dann also auch für $n + 1$ zu.

Damit ist $\sum_{k=1}^{n} k! \leq n! \cdot 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Aufgabe 2

a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} kz^k$ hat den Konvergenzradius $R = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$. Da für kein z mit $|z| = 1$ $kz^k \to 0$ $(k\to\infty)$ gilt, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} kz^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und für keine anderen z.

b) Nach a) ist $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ genau für x mit $|x| < 1$ definiert. Beachtet man $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, und

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\Big)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$$

für $|x| < 1$, so folgt:

$$f(x) = x\Big(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\Big)' = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

c) $$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}\Big)^3 = \Big(f\big(\tfrac{1}{2}\big)\Big)^3 = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}\right)^3 = 8$$

Aufgabe 3

a) Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt nach der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{(1-\cos x)x^2 - 2x(x-\sin x)}{x^4} = \frac{-x - x\cos x + 2\sin x}{x^3}.$$

Außerdem gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + - \dots\right)}{x^3} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 - + \dots}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}x^2 + \frac{1}{7!}x^4 - + \dots = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Damit ist f in 0 differenzierbar und es gilt $f'(0) = \frac{1}{6}$.

Fazit: f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x - x\cos x + 2\sin x}{x^3} & \text{falls } x \neq 0\,, \\ \dfrac{1}{6} & \text{falls } x = 0\,. \end{cases}$$

b) **i)** Es gilt

$$\int_{-1}^{\pi} \left|\cos\left(\tfrac{x+|x|}{2}\right)\right| dx = \int_{-1}^{0} \left|\cos\left(\tfrac{x+(-x)}{2}\right)\right| dx + \int_{0}^{\pi} \left|\cos\left(\tfrac{x+x}{2}\right)\right| dx =$$

$$\int_{-1}^{0} 1\,dx + \int_{0}^{\pi} |\cos x|\,dx = 1 + \int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos x\,dx =$$

$$1 + [\sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} + [-\sin x]_{x=\pi/2}^{x=\pi} = 1 + 1 - 0 + (-0) - (-1) = 3.$$

ii) Mit partieller Integration folgt

$$\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2} \cdot \left(\tfrac{1}{3}x^3 + x\right) dx =$$

$$\left[-\frac{1}{(x^2+1)} \cdot \left(\tfrac{1}{3}x^3 + x\right)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 -\frac{1}{(x^2+1)} \cdot (x^2+1)\,dx =$$

$$\frac{-1}{2} \cdot \frac{4}{3} - (-1)\cdot 0 + \int_0^1 1\,dx = \frac{-2}{3} + 1 = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 4

a) $\sqrt[2k]{a_{2k}} = \sqrt[2k]{\frac{1}{2^{2k}}} = \frac{1}{2} \qquad k = 1, 2, \ldots$

$\sqrt[2k+1]{a_{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{\frac{1}{2^{k+1}}} = \frac{1}{2^{\frac{k+1}{2k+1}}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$

Also: $\underline{\limsup \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\left.\begin{array}{l} \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{1}{2^{2k+2}} \frac{2^{k+1}}{1} = \frac{1}{2^{k+1}} \to 0 \ (k\to\infty) \\ \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{1}{2^{k+1}} \frac{2^{2k}}{1} = 2^{k-1} \to \infty \ (k\to\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty} \\ \underline{\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0} \end{array}$

---

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n(0) = 0$. Für $x > 0$ schätzt man ab:

$\underline{(*)} \qquad \underline{0 < f_n(x)} = \frac{nx}{1 + nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^4 + \ldots} \underline{<} \frac{nx}{\frac{1}{2}n^2x^4} = \underline{\frac{2}{x^3}\frac{1}{n}} \ , n \in \mathbb{N}$

Also: mit $f(x) = 0$ für $x \geq 0$ gilt: $f_n \to f \ (n\to\infty)$ punktweise für $x \geq 0$.

i) Für $x \geq 0$ liegt keine gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f \ (n\to\infty)$ vor.

Es müsste gelten $\|f_n\|_{\infty, x\geq 0} \to 0 \ (n\to\infty)$. Wegen

$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}\,\frac{1}{e}$ gilt jedoch: $\|f_n\|_{\infty, x\geq 0} \geq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}\,\frac{1}{e} \to \infty \ (n\to\infty)$.

ii) Für $x \geq \frac{1}{2}$ gilt $\frac{2}{x^3} \leq 16$ und $\underline{(*)}$ gibt $\underline{0 \leq f_n(x) \leq \frac{16}{n}, \ x \geq \frac{1}{2}}$

Also: $\|f_n\|_{\infty, x \geq \frac{1}{2}} \leq \frac{16}{n} \to 0, \ n \to \infty$.

D.h.: Es gilt: $f_n \to f = 0 \ (n\to\infty)$ gleichmäßig für $x \geq \frac{1}{2}$